

500 р.
П. АППЕЛЛЬ

и

С. ДОТЕВИЛЛЬ

Профессоръ Университета
въ Парижѣ.

Профессоръ Университета
въ Монпелье.

== КУРСЪ == ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Переводъ съ французскаго подъ редакціей и съ примѣчаніями

С. О. ШАТУНОВСКАГО

приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета

ВЫПУСКЪ II.



Одесса 1912.

<http://mathesis.ru>

<http://mathesis.ru>

P. APPELL et S. D'AUTHEVILLE

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

<http://mathesis.ru>

<http://mathesis.ru>

1922

Александров, Москва, 1922, X

Александров

П. АППЕЛЛЬ и С. ДОТЕВИЛЛЬ

Профессоръ Университета
въ Парижѣ.

Профессоръ Университета
въ Монпелье.

===== КУРСЪ =====

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ВВЕДЕНИЕ ВЪ ИЗУЧЕНИЕ ФИЗИКИ
== И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ==

Переводъ съ французскаго
И. Л. ЛЕВИНОВА

подъ редакціей и съ примѣчаніями
С. О. ШАТУНОВСКАГО

приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета

ВЫПУСКЪ II



Одесса 1912

<http://mathesis.ru>

ОДЕССА.

Тип. Акціонернаго Южно-Русскаго О-ва Печатнаго Дѣла
(Пушкинская ул., соб. д. № 18).

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

ВЪ ПЕРВОМЪ ВЫПУСКѢ:

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
91	9 сн.	V_x	V_z
95	1 сн.	$A\omega^n$	$A\omega_n$
146	16 св.	отрицательнымъ	положительнымъ
196	5 сн.	$\int_a^b y_0 dx$	$\int_b^a y_0 dx$
200	4 сн.	$kz \int \int$	$k \int \int$
251	Первыя три строки этой страницы должны быть въ концѣ этой же страницы.		
255	16 сн.	$-k^2 x^2$	$-k^2 x_0^2$
"	12 сн.	$x_0 > a$	$x_0 > 0$
"	6 сн.	ея скорость	абсолютная величина ея скорости
318	7 сн.	N_b	N_B

ВО ВТОРОМЪ ВЫПУСКѢ:

5	7 сн.	суммѣ внѣшнихъ	суммѣ моментовъ внѣшнихъ
80	11 сн.	$Bq \cos \varphi \sin \theta$	$Bq \cos \varphi) \sin \theta$
107	5 и 6 св.	уравненіями	неравенствами
119	3 сн.	$v'_1 = v'_0 + \alpha$	$v'_1 = v_0 + \alpha$
137	8 сн.	$\tilde{\mathcal{E}}_Z$	$\tilde{\mathcal{E}}_L$
"	19 св.	M	M_ν
138	10 св.	нулю	нулю ⁹⁾
164	10 св.	$\frac{\partial}{\partial q'_a} = \frac{\partial x}{\partial q_a}$	$\frac{\partial x'}{\partial q'_a} = \frac{\partial x}{\partial q_a}$
190	7 сн.	$\Sigma p_\nu q_\nu$	$\Sigma p_\nu q'_\nu$
196	9 сн.	$(y_1 - y'_0) y'_1$	$(y'_1 - y'_0) y'_1$
205	5 св.	$\psi \frac{d\psi}{dn} d\sigma.$	$\psi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma.$
227	8 св.	$\frac{U'_1 - U'_1}{\Delta x} + \frac{U'_2 - U'_2}{\Delta x}$	$\frac{U'_1 - U'_1}{\Delta x} + \frac{U'_2 - U'_2}{\Delta x}$
256	5 св.	+ -	+

<http://mathesis.ru>

СОДЕРЖАНИЕ ВТОРОГО ВЫПУСКА

ГЛАВА IX. — Динамика системъ. Общія теоремы; семь всеобщихъ уравненій движенія.

	СТР.
199. Общія замѣчанія	1

I. — Теоремы о проеціяхъ и моментахъ количествъ движенія.

200. Теорема о проеціяхъ количествъ движенія, или теорема о движеніи центра тяжести	2
201. Теорема о моментахъ количествъ движенія	4
202. Геометрическое представленіе обѣихъ теоремъ	7

II. — Теорема живыхъ силъ.

203. Доказательство	9
204. Замѣчаніе о работахъ внутреннихъ силъ	10
205. Случай твердаго тѣла	10
206. Раздѣленіе силъ на непосредственно приложенныя силы и силы связи	11
207. Теорема живыхъ силъ въ конечной формѣ	11
208. Интегралъ живыхъ силъ	12
209. Однородность	12

III. — Семь всеобщихъ уравненій.

210. Краткій обзоръ изложеннаго	12
211. Произвольная часть системы	14
212. Движеніе относительно системы осей, имѣющей равномѣрное и прямолинейное поступательное движеніе	14

IV. — Нѣкоторые примѣры

213. Предварительныя замѣчанія	14
214. Приложеніе къ простымъ случаямъ	15

V. — Теоремы кинематики, посредствомъ которыхъ вычисляются моменты количествъ движенія и живая сила.

215. Опреѣленіе относительнаго движенія системы вокругъ ея центра тяжести	23
216. Вычисленіе суммы моментовъ количествъ движенія около неподвижной оси	23
217. Упрощеніе вычисленія живой силы	25

VI. — Теоремы о моментахъ и о живыхъ силахъ въ относительномъ движеніи вокругъ центра тяжести.

218. Теорема о моментахъ количествъ движенія въ относительномъ движеніи вокругъ центра тяжести	27
219. Геометрическая интерпретація	29
220. Теорема живыхъ силъ въ относительномъ движеніи вокругъ центра тяжести	31
221. Наибольшее возможное число независимыхъ общихъ уравненій . .	34

VII. — Энергія.

222. Консервативная система	34
---------------------------------------	----

ГЛАВА X. — Движеніе твердаго тѣла.

I. — Движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.

223. Уравненіе движенія	36
224. Перманентныя и спонтанныя оси вращенія	41
225. Физическій маятникъ	43

II. — Движеніе твердаго тѣла параллельно неподвижной плоскости.

226. Уравненія движенія	46
-----------------------------------	----

III. — Движеніе твердаго тѣла, которое можетъ вращаться вокругъ неподвижной оси и перемѣщаться вдоль этой оси.

227. Уравненія движенія	55
-----------------------------------	----

IV. — Общія предложенія о движеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

228. Предварительныя геометрическія и кинематическія свѣдѣнія	56
229. Живая сила и результирующій моментъ количествъ движенія . . .	59
230. Задача динамики; уравненія Эйлера	61
231. Реакція неподвижной точки	63

СТР.

V. — Случай, когда непосредственно приложенныя силы постоянно приводятся къ одной только силѣ, проходящей черезъ неподвижную точку.

232. Первые интегралы	64
233. Изученіе движенія; интегрированіе приводится къ квадратурѣ . .	65
234. Начальныя частныя условія	69
235. Случай, когда эллипсоидъ инерціи, соотвѣтствующій точкѣ <i>O</i> , есть поверхность вращенія	71
236. Геометрическое представленіе движенія по Пуансо	73

VI. — Движеніе твердаго тяжелаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

237. Первые интегралы, доставляемые общими теоремами	79
238. Случай, когда эллипсоидъ инерціи, соотвѣтствующій неподвижной точкѣ, есть поверхность вращенія, и центръ тяжести лежитъ на оси вращенія	81
239. Частный случай	85

VII. — Движеніе свободнаго тѣла. Движеніе системы твердыхъ тѣлъ.

240. Свободное твердое тѣло	87
241. Примѣръ. Тяжелое твердое тѣло въ пустотѣ	89
242. Движеніе системы твердыхъ тѣлъ	89

ГЛАВА XI. — ТРЕНІЕ.

I. — Опредѣленія.

243. Общія замѣчанія	90
244. Скольженіе, каченіе и верченіе подвижной поверхности на неподвижной	90
245. Треніе	91

II. — Треніе скольженія.

246. Треніе скольженія	93
247. Законъ тренія скольженія въ состояніи покоя	93
248. Равновѣсіе натуральныхъ твердыхъ тѣлъ при наличности тренія . .	95
249. Лѣстница	96
250. Треніе скольженія во время движенія	98
251. Возможные разрывы сплошности въ уравненіяхъ движенія	99
252. Примѣръ	100
253. Примѣръ	102

III. — Треніе каченія.

254. Законы относительно тренія каченія	105
255. Каченіе	108
256. Примѣръ. Каченіе однороднаго круговаго цилиндра по горизонтальной плоскости	109

ГЛАВА XII. — Удары.

I. — Удары, приложенные къ матеріальной точкѣ.

257. Опредѣленія	111
258. Удары, приложенные къ матеріальной точкѣ	111
259. Дѣйствіе обыкновенныхъ силъ за время удара равно нулю	114
260. Теоремы, относящіяся къ матеріальной точкѣ	114

II. — Удары, приложенные къ системѣ.

261. Общія теоремы	115
262. Замѣчаніе	117
263. Прямой ударъ двухъ шаровъ	117
264. Удары, приложенные къ твердому тѣлу, вращающемуся вокругъ неподвижной оси	120
265. Случай одного только удара. Центръ удара	122
266. Балистическій маятникъ	125
267. Твердое тѣло, вращающееся около неподвижной точки	127
268. Совершенно свободное твердое тѣло	128
269. Нѣсколько твердыхъ тѣлъ	128

ГЛАВА XIII. — Начало возможныхъ работъ.

270. Предварительныя замѣчанія	129
--	-----

I. — Формулировка и доказательство.

271. Возможное перемѣщеніе и возможная работа	130
272. Формулировка начала	130
273. Свободная точка	131
274. Точка, движущаяся на неподвижной поверхности	131
275. Точка, движущаяся по неподвижной кривой	132
276. Совершенно свободное твердое тѣло	132
277. Предварительная теорема о возможной работѣ силъ связи	133
278. Общее опредѣленіе связей безъ тренія	136
279. Доказательство начала возможныхъ работъ	137
280. Замѣчаніе о работѣ силы	138

II. — Общія условія равновѣсія, вытекающія изъ начала возможныхъ работъ.

281. Общее уравненіе статики	139
282. Система съ k степенями свободы; k условій равновѣсія	139
283. Частный случай	141

	СТР.
284. Частный случай, когда выраженіе возможной работы есть полный дифференціалъ	145
285. Приложение; тяжелое тѣло	146

III. — Множители Лагранжа.

286. Случай, когда связи выражены уравненіями между координатами точекъ системы	147
287. Примѣръ	149

ГЛАВА XIV. — Начало Даламбера; уравненія Лагранжа.

I. — Общее уравненіе динамики.

288. Формулировка начала Даламбера	151
289. Общее уравненіе динамики для системы съ связями безъ тренія	152
290. Примѣръ	153
291. Приведеніе уравненій движенія къ наименьшему числу	155
292. Случай, когда связи выражаются уравненіями между координатами. Множители Лагранжа	156
293. Замѣчанія относительно случая, когда связи зависятъ отъ времени.	157

II. — Теоремы, вытекающія изъ начала Даламбера.

294. Примѣненія начала Даламбера	158
295. Частный случай теоремы живыхъ силъ	160

III. — Уравненія Лагранжа.

296. Голономныя системы	160
297. Уравненія Лагранжа для голономной системы безъ тренія	162
298. Вычисленіе количествъ Q_a	166
299. Случай, когда существуетъ силовая функція	166
300. Примѣръ	167
301. Интегралъ живыхъ силъ	169
302. Примѣры	171

IV. — Малыя движенія голономной системы около положенія устойчиваго равновѣсія.

303. Устойчивость равновѣсія	176
304. Малыя движенія	179

V. — Каноническія уравненія.

305. Преобразованіе Пуассона и Гамильтона	187
306. Каноническія уравненія	189
307. Частный случай, когда связи не зависятъ отъ времени	190

308. Случай, когда связи не зависят отъ времени, и существуетъ силовая функция; интеграль живыхъ силъ	190
309. Примѣръ	191

Глава XV. — Удары. — ТЕОРЕМА КАРНО.

310. Общее уравненіе теоріи ударовъ	193
311. Длительныя связи	195
312. Теорема Карно	195
313. Примѣръ. Балистическій маятникъ	197

Глава XVI. — Притяженіе; потенциалъ.

I. — Формула Грина.

314. Преобразование интеграла, взятаго по объему, въ интеграль, взятый по поверхности	198
315. Геометрическая интерпретація. Силовой потокъ. Расхожденіе	202
316. Частный случай, когда для выраженія $Fdx + Gdy + Hdz$ существуетъ интегрирующий множитель	203
317. Случай, когда выраженіе $Fdx + Gdy + Hdz$ есть полный дифференціалъ	205

II. — Притяженіе изолированныхъ точекъ.

318. Ньютоново притяженіе	206
319. Притяженіе точки нѣсколькими изолированными точками. Потенціалъ.	206
320. Электрическія и магнитныя притяженія	208
321. Во всѣхъ точкахъ, кромѣ тѣхъ, въ которыхъ находятся притягивающія точки, потенциалъ удовлетворяетъ уравненію Лапласа	209
322. Теорема Гаусса о силовомъ потокѣ	210

III. — Притяженіе вѣншей точки сплошной массой. Уравненіе Лапласа.

323. Притяженіе вѣншей точки	214
324. Потенціалъ	216
325. Уравненіе Лапласа	216
326. Частный случай: притягивающій сплошной объемъ; плотность въ точкѣ	217
327. Вычисленіе притяженія, производимаго на весьма удаленную точку.	217
328. Притяженіе вѣншей точки однороднымъ сферическимъ слоемъ	220

IV. — Притяженіе сплошнымъ объемомъ внутренней точки. Уравненіе Пуассона.

329. Точка P лежитъ внутри притягивающаго объема	223
330. Функции U , X , Y , Z остаются опредѣленными и конечными внутри притягивающей массы	224

331. Соотношенія $X = f \frac{dU}{dx}$, . . . сохраняютъ силу внутри притягивающаго объема	225
332. Вторыя производныя потенціала	227
333. Силовой потокъ. Теорема Гаусса	230
334. Уравненіе Пуассона	231
335. Разрывъ непрерывности вторыхъ производныхъ функций U	232
336. Однородная сфера: подтвержденіе уравненія Пуассона	232
337. Подтвержденіе уравненія Пуассона для однородной притягивающей массы	233

V. Неограниченныя притягивающія массы.

338. Притяженіе точки однороднымъ стержнемъ	234
---	-----

ГЛАВА XVII. — РАВНОВѢСІЕ И ВНУТРЕННЕЕ ДВИЖЕНІЕ СОВЕРШЕННОЙ ЖИДКОСТИ.

I. — Нѣкоторыя общія положенія относительно равновѣсія и внутренняго движенія сплошной массы.

339. Указаніе метода	237
340. Внѣшнія силы, приложенныя къ сплошной массѣ. Шесть общихъ уравненій равновѣсія и движенія	237
341. Произвольная часть системы	240
342. Напряженіе въ элементѣ $d\sigma$	242

II. — Общія уравненія равновѣсія и движенія совершенной жидкости.

343. Совершенныя жидкости	243
344. Опредѣленіе давленія въ точкѣ	245
345. Уравненія движенія и равновѣсія совершенной жидкости	247

III. — Равновѣсіе жидкостей. Гидростатика.

346. Уравненія равновѣсія	249
347. Единственное уравненіе равновѣсія. Геометрическая интерпретація	249
348. Случай силовой функции	250
349. Законы силъ, которыя въ состояніи удержать жидкость въ равновѣсіи	250
350. Характеристическое уравненіе жидкости	251
351. Поверхности уровня	251
352. Приложеніе къ тяжелымъ жидкостямъ	252
353. Случай, когда существуетъ силовая функция	254

354. Приложение. Относительное равновѣсіе тяжелой жидкости, обладающей равномернымъ вращательнымъ движеніемъ вокругъ неподвижной вертикальной оси	255
355. Принципъ Архимеда	258

IV. — Давленіе на плоскую площадку въ тяжелой жидкости, находящейся въ изотермическомъ равновѣсіи.

356. Опредѣленіе. Принципъ Паскаля	260
357. Давленіе въ точкѣ	261
358. Плоскость нулевого давленія	261
359. Давленіе на плоскую стѣнку	262
360. Центр давленія	263

V. — Равновѣсіе плавающихъ тѣлъ.

361. Условія, необходимыя для равновѣсія плавающего тѣла	265
362. Опредѣленія	265
363. Первая теорема Дюпена	266
364. Вторая теорема Дюпена	268
365. Положенія равновѣсія плавающего тѣла	269

Глава XVIII. — Движеніе совершенныхъ жидкостей. Гидродинамика.

366. Уравненія движенія	271
-----------------------------------	-----

I — Переменные Лагранжа.

367. Переменные Лагранжа	271
368. Уравненіе сплошности	275
369. Заключение	278
370. Начальныя условія и условія на границахъ. Разрывы сплошности	279

II. — Переменные Эйлера. Режимъ.

371. Мгновенное состояніе скоростей жидкой массы. Режимъ	281
372. Опредѣленіе режима	282
373. Случай, когда плотность ρ есть функція давленія p , а силы и скорости произведены потенциаломъ	285
374. Установившееся движеніе	287
375. Установившееся движеніе въ случаѣ, когда существуетъ силовая функція, независящая отъ времени, и когда плотность есть функція только отъ давленія. Теорема Бернулли	288
376. Приложение къ несжимаемой жидкости	290
377. Теорема Торричелли	291

III. — Элементы теоріи вихрей.

378. Векторъ-вихрь	293
379. Вихревыя линіи	295
380. Другой видъ уравненій движенія	296
381. Случай, когда плотность ρ есть функція давленія p и силы имѣютъ потенціалъ. Уравненія Гельмгольца	297
382. Уравненія теоріи вихрей	298
383. Теорема Лагранжа	299

Упражненія къ различнымъ отдѣламъ курса.

<i>I. — Кинематика.</i>	301
<i>II. — Статика</i>	306
<i>III. — Геометрія массъ</i>	311
<i>IV. — Динамика точки</i>	313
<i>V. — Динамика системъ</i>	319
<i>VI. — Притяженіе. Гидростатика. Гидродинамика</i>	344
<i>VII. — Задачи на различныя части курса</i>	348
Примѣчанія редактора	355

ГЛАВА IX.

ДИНАМИКА СИСТЕМЪ. ОБЩІЯ ТЕОРЕМЫ; СЕМЬ ВСЕОБЩИХЪ УРАВНЕНІЙ ДВИЖЕНІЯ.

199. Общія замѣчанія.—Подъ матеріальной системой разумѣють совокупность матеріальныхъ точекъ, между которыми существуютъ опредѣленные связи. Напримѣръ, твердое тѣло есть система, точки которой должны оставаться на неизмѣнныхъ разстояніяхъ однѣ отъ другихъ. Какъ мы видѣли (п. 88), каждую точку системы мы можемъ разсматривать, какъ свободную въ пространствѣ, если введемъ силы связи.

Разсмотримъ точку $M(x, y, z)$, имѣющую массу m . Силы, дѣйствующія на нее, могутъ быть раздѣлены на два класса: къ одному мы относимъ всѣ силы, съ которыми на точку M дѣйствуютъ другія точки системы, — такъ называемыя внутреннія силы системы (X_i, Y_i, Z_i); второй классъ включаетъ всѣ остальные силы, которыя мы назовемъ внѣшними силами (X_e, Y_e, Z_e). Уравненія движенія точки M представляются теперь въ видѣ

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i + \Sigma X_e, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_i + \Sigma Y_e, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_i + \Sigma Z_e, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ знаки Σ указываютъ, что нужно взять сумму проекцій всѣхъ внутреннихъ и внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ разсматриваемой точкѣ.

Комбинируя различнымъ образомъ уравненія движенія всѣхъ точекъ системъ, мы получимъ общія теоремы, относящіяся къ движенію системъ.

І. — ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКЦІЯХЪ И МОМЕНТАХЪ КОЛИЧЕСТВЪ ДВИЖЕНІЯ.

200. Теорема о проекціяхъ количествъ движенія, или теорема о движеніи центра тяжести. — Предположимъ, что уравненія (1) написаны для всѣхъ точекъ системы; сложивъ почленно уравненія, относящіяся къ оси x -овъ, мы получимъ уравненіе

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum \sum X_i + \sum \sum X_e,$$

гдѣ знакъ $\sum \sum$ указываетъ, что суммирование распространяется на всѣ силы, дѣйствующія на различныя точки системы. Но, согласно принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія, внутреннія силы попарно равны и прямопротивоположны; поэтому сумма $\sum \sum X_i$ ихъ проекцій на ось x -овъ равна нулю, и предыдущее уравненіе получаетъ слѣдующій видъ:

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum \sum X_e;$$

мы получимъ такимъ же образомъ два аналогичныхъ уравненія: одно для оси Oy , другое для оси Oz ; эти три уравненія можно написать такъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} &= \sum \sum X_e, \\ \frac{d}{dt} \sum m \frac{dy}{dt} &= \sum \sum Y_e, \\ \frac{d}{dt} \sum m \frac{dz}{dt} &= \sum \sum Z_e, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Они выражаютъ для каждой изъ трехъ координатныхъ осей и, слѣдовательно, для любой неподвижной оси слѣдующую теорему:

Производная по времени суммы проекцій количествъ движенія на какую-нибудь неподвижную ось равна суммѣ проекцій *внѣшнихъ* силъ на эту ось.

Этимъ же самымъ уравненіямъ (2) можно дать и другую интерпретацію. Обозначивъ черезъ M массу $\sum m$ всей системы и че-

резъ ξ , η , ζ координаты центра тяжести системы, мы будемъ имѣть уравненія

$$M\xi = \Sigma mx, \quad M\eta = \Sigma my, \quad M\zeta = \Sigma mz,$$

и, слѣдовательно:

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad M \frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2};$$

уравненія (2) мы можемъ теперь написать такъ:

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma \Sigma X_e, \quad M \frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma \Sigma Y_e, \quad M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma \Sigma Z_e; \quad (2 \text{ bis})$$

уравненія въ этомъ видѣ даютъ намъ теорему о движеніи центра тяжести:

Центръ тяжести системы движется, какъ матеріальная свободная точка, въ которой сосредоточены всѣ массы системы и къ которой приложены силы, равныя и параллельныя внѣшнимъ силамъ.

Мы видимъ, что внутреннія силы не вліяютъ на движеніе центра тяжести.

Примѣры. — 1° Система безъ внѣшнихъ силъ. — Въ простѣйшемъ случаѣ система свободна отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ. Въ этомъ случаѣ центръ тяжести движется прямолинейно и равномерно. Напримѣръ, если допустимъ, что дѣйствія звѣздъ на солнечную систему равны нулю, то центръ тяжести этой системы, который находится весьма близко къ солнцу, имѣетъ равномерное прямолинейное движеніе.

Если вначалѣ система находится въ покоѣ, то центръ тяжести остается неподвижнымъ.

2° Движеніе живого существа по совершенно гладкой горизонтальной плоскости. — Вообразимъ наблюдателя, находящагося на совершенно гладкой горизонтальной плоскости, которую мы примемъ за плоскость xu ; этотъ наблюдатель представляетъ собою матеріальную систему, на которую дѣйствуютъ только вертикальныя внѣшнія силы, а именно, вѣсъ различныхъ частицъ тѣла и нормальныя реакціи плоскости. Пользуясь Лагранжевымъ обозначеніемъ производныхъ и обозначая штрихами производныя по t , мы имѣемъ уравненія:

$$\xi'' = 0, \quad \eta'' = 0, \quad \xi' = a, \quad \eta' = b, \\ \xi = at + \alpha, \quad \eta = bt + \beta,$$

гдѣ a и b обозначаютъ проекціи на оси Ox и Oy начальной скорости центра тяжести G наблюдателя. Горизонтальная проекція точки G имѣетъ, слѣдовательно, равномерное прямолинейное движеніе.

Если наблюдатель вначалѣ находится въ состояніи покоя, то количества a и b равны нулю, и координаты ξ и η остаются постоянными: въ этомъ случаѣ точка G можетъ двигаться только по неподвижной вертикальной линіи, какія бы усилія ни дѣлалъ наблюдатель.

3° Тяжелая система въ пустотѣ. — Если тяжелая система брошена въ пустотѣ, то ея центръ тяжести описываетъ параболу съ вертикальной осью безразлично, будетъ ли движущійся объектъ твердымъ тѣломъ или деформирующей системой, какъ, напримѣръ, цѣпь, живое существо и т. д. Дѣйствительно, единственными внѣшними силами здѣсь будутъ вѣса mg различныхъ точекъ системы; если мы перенесемъ ихъ въ центръ тяжести, то онѣ дадутъ вертикальную равнодѣйствующую $\sum mg = Mg$; слѣдовательно, центръ тяжести перемѣщается, какъ тяжелая точка, имѣющая массу M .

4° Притяженіе, пропорціональное разстоянію. — Разсмотримъ систему матеріальныхъ точекъ, притягиваемыхъ къ неподвижному центру съ силой, пропорціональной массамъ и разстояніямъ r . Внѣшними силами здѣсь являются притяженія fmr , исходяція изъ центра O ; перенесемъ ихъ въ центръ тяжести G . Мы видѣли въ статикѣ (п. 84), что равнодѣйствующая этихъ силъ направлена по прямой GO и равна $fM \cdot GO$; центръ тяжести перемѣщается, слѣдовательно, какъ матеріальная точка, притягиваемая къ центру O съ силой, пропорціональной разстоянію; онъ описываетъ, слѣдуя закону площадей, эллипсъ, имѣющій центръ въ точкѣ O (п. 159).

Въ двухъ послѣднихъ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ правыя части уравненій (2 bis) зависятъ только отъ координатъ ξ, η, ζ , и мы могли выполнить интегрированіе; вообще же это не имѣетъ мѣста, ибо уравненія (2 bis) зависятъ отъ координатъ всѣхъ точекъ системы и даютъ намъ лишь нѣкоторыя свѣдѣнія о движеніи. Это затрудненіе мы встрѣчаемъ уже, когда желаемъ изучить движеніе двухъ матеріальныхъ точекъ, которыя притягиваютъ другъ друга и притягиваются неподвижнымъ центромъ съ силою, обратно пропорціональной квадрату разстоянія; равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ, перенесенныхъ въ центръ тяжести, зависитъ отъ координатъ обѣихъ точекъ и не можетъ быть выражена лишь въ функціи отъ координатъ центра тяжести.

201. Теорема о моментахъ количествъ движенія. — Возвратимся къ уравненіямъ (1); умноживъ первое на $-y$, второе — на x и сложивъ результаты, мы получимъ

$$m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = x \sum Y_i - y \sum X_i + x \sum Y_e - y \sum X_e \\ = \sum (x Y_i - y X_i) + \sum (x Y_e - y X_e);$$

это уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = \sum (x Y_i - y X_i) + \sum (x Y_e - y X_e).$$

Написавъ аналогичныя уравненія для всѣхъ точекъ системы и сложивъ ихъ почленно, мы получимъ:

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \Sigma (x Y_i - y X_i) + \sum \Sigma (x Y_e - y X_e).$$

Но выраженіе $\sum \Sigma (x Y_i - y X_i)$ представляетъ сумму моментовъ всѣхъ внутреннихъ силъ около оси Oz . Это выраженіе равно нулю, потому что эти силы попарно равны и прямопротивоположны; имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \Sigma (x Y_e - y X_e),$$

въ которомъ лѣвая часть есть производная по времени отъ суммы моментовъ количествъ движенія около неподвижной оси Oz , а правая часть представляетъ сумму моментовъ внѣшнихъ силъ около той же самой оси.

Выполнивъ аналогичное вычисленіе для каждой изъ двухъ другихъ осей, мы будемъ имѣть три уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \sum \Sigma (y Z_e - z Y_e), \\ \frac{d}{dt} \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \sum \Sigma (z X_e - x Z_e), \\ \frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \sum \Sigma (x Y_e - y X_e), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которыя служатъ аналитическими выраженіями теоремы о моментахъ количествъ движенія. Они выражаютъ для каждой изъ трехъ координатныхъ осей и, слѣдовательно, для любой неподвижной оси слѣдующую теорему:

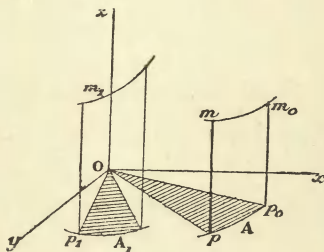
Производная по времени суммы моментовъ количествъ движенія около любой неподвижной оси равна суммѣ внѣшнихъ силъ около этой оси.

Частные случаи: 1° Начало площадей. — Предположимъ, что сумма моментовъ внѣшнихъ силъ около неподвижной оси постоянно равна нулю. Если мы эту ось примемъ за ось Oz , то предыдущая теорема дастъ намъ уравненіе:

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C. \quad (4)$$

Это уравнение выражаетъ, что сумма моментовъ количествъ движенія около разсматриваемой оси есть величина постоянная; оно даетъ намъ первый интеграль уравненій движенія.

Въ этомъ случаѣ принято говорить, что начало или теорема площадей примѣняется къ проекціи движенія на плоскость, перпендикулярную къ этой оси. Пусть $p_1, p_2, \dots$ будутъ проекціи движущихся точекъ $m_1, m_2, \dots$ (фиг. 137) на плоскость xOy ,



Фиг 137.

перпендикулярную къ оси, и обозначимъ черезъ $A_1, A_2, \dots$ площади, описываемыя радіусами-векторами $Op_1, Op_2, \dots$, выходящими изъ основанія оси; имѣемъ, вообще:

$$2dA = xdy - ydx;$$

уравненіе (4) можно теперь написать такъ:

$$2\Sigma m \frac{dA}{dt} = C;$$

интегрируя, получимъ:

$$\Sigma mA = \frac{1}{2} Ct + C'.$$

Сумма произведеній площадей, описываемыхъ радіусами-векторами, на соотвѣтственныя массы измѣняется пропорціонально времени. Константа C площадей вдвое больше приращенія суммы ΣmA за единицу времени.

Вообразимъ, напримѣръ, живое существо, находящееся на совершенно гладкой горизонтальной плоскости P . Всѣ внѣшнія силы вертикальны; сумма ихъ моментовъ около любой неподвижной вертикальной оси Oz равна нулю. Теорема площадей примѣняется,

слѣдовательно, къ проекціи движенія на плоскость P , если отсчитывать площади вокругъ какой-либо точки O этой плоскости. Въ частномъ случаѣ, если разсматриваемое существо вначалѣ находится въ покоѣ, то всѣ количества $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ вначалѣ равны нулю, и константа C площадей есть нуль. Если затѣмъ существо движется, то лѣвая часть уравненія (4) остается нулемъ; если одна часть тѣла повернется въ одну какую-нибудь сторону, то другая часть непременно должна повернуться въ противоположную сторону *).

2° Случай, когда результирующій моментъ внѣшнихъ силъ около неподвижной точки O равенъ нулю. — Въ этомъ случаѣ сумма моментовъ силъ около любой оси, проведенной изъ точки O , равна нулю. Теорема площадей примѣняется къ проекціи движенія на любую неподвижную плоскость, проходящую черезъ точку O , при чемъ площади описываются на этой плоскости радіусами, выходящими изъ точки O . Если примемъ эту точку за начало системы прямоугольныхъ осей, то мы будемъ имѣть три первыхъ интеграла, аналогичныхъ уравненіямъ (4), по одному для каждой координатной плоскости.

3° Случай, когда нѣтъ внѣшнихъ силъ. — Въ этомъ случаѣ теорема площадей примѣняется къ проекціи движенія на любую неподвижную плоскость, при чемъ площади отсчитываются вокругъ любой неподвижной точки плоскости.

202. Геометрическое представленіе обѣихъ теоремъ. — Предыдущія двѣ теоремы (о проекціяхъ и моментахъ количествъ движенія) поддаются простой геометрической интерпретаціи, при которой онѣ получаютъ значеніе, независящее отъ расположенія осей.

Въ каждой точкѣ системы построимъ въ моментъ t векторъ mv , представляющій количество движенія этой точки; далѣе, выберемъ неподвижную точку O и построимъ геометрическую сумму Oq и главный моментъ $O\sigma$ всѣхъ этихъ векторовъ около точки O (фиг. 138).

*) О подробностяхъ см. Appell, „Traité de Mécanique“, т. II; ср. также „Вѣстникъ Опытн. Физики“, №№ 455 — 456: Фенпль, „Задача о падающей кошкѣ“.

Если через α , β , γ и λ , μ , ν обозначимъ соответственно проекціи векторовъ Or и Os на координатныя оси, то

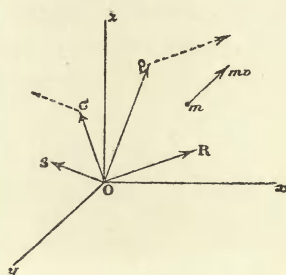
$$\alpha = \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad \beta = \Sigma m \frac{dy}{dt}, \quad \gamma = \Sigma m \frac{dz}{dt},$$

$$\lambda = \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\mu = \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right),$$

$$\nu = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Пусть OR и OS будутъ главный векторъ и главный моментъ



Фиг. 138.

внѣшнихъ силъ около той же точки O , а X , Y , Z и L , M , N проекціи этихъ векторовъ на оси, такъ что

$$X = \Sigma \Sigma X_e, \quad Y = \Sigma \Sigma Y_e, \quad Z = \Sigma \Sigma Z_e,$$

$$L = \Sigma \Sigma (yZ_e - zY_e), \quad M = \Sigma \Sigma (zX_e - xZ_e), \quad N = \Sigma \Sigma (xY_e - yX_e).$$

Тогда теорема о проекціи количествъ движенія даетъ намъ уравненія

$$\frac{d\alpha}{dt} = X, \quad \frac{d\beta}{dt} = Y, \quad \frac{d\gamma}{dt} = Z,$$

которыя выражаютъ, что абсолютная скорость точки O въ любой моментъ геометрически равна вектору OR ; точно такъ же теорема о моментахъ количествъ движенія даетъ намъ уравненія

$$\frac{d\lambda}{dt} = L, \quad \frac{d\mu}{dt} = M, \quad \frac{d\nu}{dt} = N,$$

которыя выражаютъ, что абсолютная скорость точки σ въ любой моментъ геометрически равна вектору OS . Мы можемъ

также сказать, что геометрическія производныя по времени векторовъ Oq и $O\sigma$ геометрически равны соотвѣтственно векторамъ OR и OS .

1° Частный случай, когда существуетъ неподвижная ось, около которой сумма моментовъ внѣшнихъ силъ равна нулю. Если мы эту ось примемъ за ось Oz , то будемъ имѣть $N=0$, откуда слѣдуетъ:

$$\frac{dv}{dt}=0, \quad v=C, \quad \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C.$$

Въ этомъ случаѣ векторъ $O\sigma$ измѣняется такимъ образомъ, что его проекція на ось Oz остается постоянной; теорема площадей примѣняется вокругъ точки O къ проекціи движенія на плоскость xOy , перпендикулярную къ оси Oz , и постоянная площадей на этой плоскости есть постоянная проекція вектора $O\sigma$ на ось Oz .

2° Случай, когда существуетъ неподвижная точка O , около которой главный моментъ OS внѣшнихъ силъ постоянно равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ точка σ неподвижна¹⁾; теорема площадей вокругъ точки O имѣетъ мѣсто для любой плоскости P , проходящей черезъ точку O , и постоянная площадей на этой плоскости есть проекція вектора $O\sigma$ на нормаль Oz къ плоскости P . Постоянная площадей имѣетъ, слѣдовательно, максимумъ для проекціи движенія на плоскость P_0 , перпендикулярную къ вектору $O\sigma$; эта плоскость P_0 называется плоскостью максимума площадей²⁾.

II. — ТЕОРЕМА ЖИВЫХЪ СИЛЪ.

203. Доказательство. — Мы будемъ попрежнему исходить изъ уравненій движенія точки системы

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_i + \Sigma X_e,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_i + \Sigma Y_e,$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_i + \Sigma Z_e.$$

Примѣнивъ къ этой точкѣ теорему живыхъ силъ, имѣемъ:

$$d \frac{mv^2}{2} = \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) + \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz).$$

Составивъ сумму всѣхъ аналогичныхъ уравненій, мы получимъ уравненіе

$$d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma\Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) + \Sigma\Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz). \quad (5)$$

Сумма Σmv^2 живыхъ силъ точекъ системы называется полной живой силой системы.

Можно, слѣдовательно, высказать слѣдующую теорему.

ТЕОРЕМА. — Дифференціалъ половины полной живой силы системы равенъ суммѣ элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ.

Это есть теорема живыхъ силъ. Уравненіе (5) называется уравненіемъ живыхъ силъ.

204. Замѣчаніе о работахъ внутреннихъ силъ. — Работы внутреннихъ силъ, вообще, не исчезаютъ въ уравненіи живыхъ силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ п. 82 мы пришли къ слѣдующему выводу. Назовемъ черезъ F алгебраическое значеніе силы взаимодѣйствія двухъ точекъ: оно будетъ положительнымъ, когда эти точки взаимно отталкиваются, и отрицательнымъ, когда онѣ взаимно притягиваются. Если эти двѣ точки получаютъ безконечно малое перемѣщеніе, такъ что разстояніе r между ними превратится въ $r + dr$, то элементарная работа ихъ взаимодѣйствія будетъ

$$Fdr.$$

Такъ какъ внутреннія силы системы состоятъ изъ взаимодѣйствій точекъ системы, взятыхъ по двѣ вмѣстѣ, то сумма ихъ элементарныхъ работъ будетъ ΣFdr , гдѣ суммирование распространяется на всѣ пары взаимодѣйствующихъ точекъ.

Слѣдовательно, эта сумма, вообще, не равна нулю.

205. Случай твердаго тѣла. — Если рассматриваемая система состоитъ изъ одного лишь твердаго тѣла, то разстояніе между ея двумя произвольными точками остается неизмѣннымъ; слѣдовательно, для всѣхъ паръ точекъ $dr = 0$. Тогда

$$\Sigma Fdr = 0,$$

и уравненіе живыхъ силъ не содержитъ внутреннихъ силъ.

Если система состоитъ изъ нѣсколькихъ твердыхъ тѣлъ, то работы внутреннихъ силъ каждаго твердаго тѣла равны нулю, но работы внутреннихъ силъ системы, дѣйствующихъ между двумя твердыми тѣлами системы, не равны нулю, за исключеніемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

206. Раздѣленіе силъ на непосредственно приложенныя силы и силы связи.— Въ предыдущемъ мы дѣлили совокупность силъ, приложенныхъ къ системѣ, на два класса: на внутреннія силы и внѣшнія силы. Это раздѣленіе имѣетъ особенно важное значеніе въ теоріи энергіи, какъ мы увидимъ въ параграфѣ VI. Во многихъ вопросахъ теоретической механики, въ особенности въ аналитической механикѣ, проще раздѣлять силы, приложенныя къ системѣ, на другіе два класса: на силы связи, обусловленныя связями, наложенными на систему, и силы, непосредственно приложенныя, или заданныя силы, которыя должны дѣйствовать на систему. Мы можемъ теперь формулировать теорему живыхъ силъ слѣдующимъ образомъ:

Дифференціалъ половины живой силы системы равенъ суммѣ элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, какъ заданныхъ, такъ и силъ связей.

Ниже, въ аналитической механикѣ, мы укажемъ весьма распространенные случаи, въ которыхъ сумма работъ силъ связи равна нулю: мы увидимъ, дѣйствительно, что сумма работъ силъ связи равна нулю въ абсолютномъ движеніи, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда связи не зависятъ отъ времени и осуществляются безъ тренія.

207. Теорема живыхъ силъ въ конечной формѣ.— Интегрируя по перемѣнной t обѣ части дифференціального уравненія живыхъ силъ (5) между моментами t_0 и t_1 , мы находимъ:

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_1^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) + \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz).$$

Измѣненіе половины живой силы за нѣкоторый промежутокъ времени равно суммѣ работъ всѣхъ силъ за тотъ же промежутокъ.

208. Интеграль живыхъ силъ.— Если сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ, есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи

$$U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

отъ координатъ точекъ системы, то уравненіе живыхъ силъ будетъ

$$\frac{1}{2} d \Sigma mv^2 = dU,$$

откуда находимъ первый интеграль

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = U + h. \quad (2)$$

Этотъ интеграль называется интеграломъ живыхъ силъ; постоянная h есть константа живыхъ силъ, а U —силовая функція.

209. Однородность.— Если основными единицами мы будемъ считать единицы длины, массы и времени, то при уменьшеніи единицы длины въ λ разъ, единицы массы — въ μ разъ и единицы времени — въ τ разъ, выраженіе длины, какъ намъ извѣстно, увеличится въ λ разъ, выраженіе массы — въ μ разъ и выраженіе времени — въ τ разъ. Живая сила Σmv^2 получитъ, слѣдовательно, множителя $\frac{\mu \lambda^2}{\tau^2}$, а выраженіе силы — множителя $\frac{\mu \lambda}{\tau^2}$. Такъ какъ, съ другой стороны, работа есть произведеніе силы на нѣкоторую длину, то ея выраженіе получитъ множителя $\frac{\mu \lambda^2}{\tau^2}$. Слѣдовательно, обѣ части уравненія живыхъ силъ будутъ однородными функціями одного и того же измѣренія. Если работа выражена, напримѣръ, въ килограммахъ, то живая сила также будетъ представлена нѣкоторымъ числомъ килограмметровъ; если работа выражена въ эргахъ (п. 72), то и живая сила выражается эргами.

III. — СЕМЬ ВСЕОБЩИХЪ УРАВНЕНІЙ.

210. Краткій обзоръ изложеннаго. Мы сейчасъ вывели три общія теоремы, которыя могутъ быть приложены ко всѣмъ системамъ. Важно разсмотрѣть, сколько всего онѣ даютъ независимыхъ уравненій.

1° Теорема о проеціяхъ количествъ движенія въ ея геометрическомъ видѣ (п. 202) выражаетъ, что скорость конца вектора q геометрически равна главному вектору R . Аналитически это выражается тремя различными уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt} &= \Sigma \Sigma X_e, & \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dy}{dt} &= \Sigma \Sigma Y_e, \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dz}{dt} &= \Sigma \Sigma Z_e, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

или, что приводится къ тому же, тремя уравненіями движенія центра тяжести.

2° Теорема о моментахъ количествъ движенія гласитъ, что скорость конца вектора σ геометрически равна главному моменту S ; она выражается поэтому тремя различными уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \Sigma \Sigma (y Z_e - z Y_e), \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \Sigma \Sigma (z X_e - x Z_e), \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \Sigma \Sigma (x Y_e - y X_e). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Наконецъ, теорема живыхъ силъ выражается уравненіемъ:

$$\begin{aligned} d \frac{1}{2} \Sigma m v^2 &= \Sigma \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) \\ &+ \Sigma \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz). \end{aligned} \quad (3)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ всего семь уравненій, которыя могутъ быть приложены ко всѣмъ системамъ. Они могутъ быть названы семью всеобщими уравненіями движенія. Въ первыя шесть не входятъ внутреннія силы; въ седьмое же (уравненіе живыхъ силъ) входятъ работы внутреннихъ силъ, за исключеніемъ частнаго случая, когда система состоитъ изъ одного только твердаго тѣла.

Если бы мы отнесли систему къ другимъ неподвижнымъ осямъ, то получили бы семь новыхъ аналогичныхъ уравненій, которыя не отличались бы отъ прежнихъ. Новыя шесть первыхъ уравненій были бы слѣдствіями изъ прежнихъ шести первыхъ уравненій (1) и (2), а новое уравненіе живыхъ силъ было бы тождественно съ прежнимъ уравненіемъ (3).

Итакъ, три общія теоремы даютъ всего семь различныхъ уравненій.

211. Произвольная часть системы. — Мы можемъ мысленно изолировать произвольную часть S' системы S и примѣнить къ этой части S' семь всеобщихъ уравненій движенія; при этомъ мы должны будемъ, конечно, разсматривать всѣ дѣйствія точекъ системы $S - S'$ на точки системы S' , какъ силы, внѣшнія по отношенію къ системѣ S' .

212. Движеніе относительно системы осей, имѣющей равномѣрное и прямолинейное поступательное движеніе. — Пусть $O'x'y'z'$ будетъ система осей, параллельныхъ неподвижнымъ осямъ, и пусть a, b, c будутъ координаты ея движущагося начала. Далѣе, обозначимъ черезъ x', y', z' координаты какой-нибудь точки относительно этихъ осей и черезъ x, y, z — абсолютныя координаты этой же самой точки. Мы имѣемъ соотношенія

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

Если точка O' имѣетъ прямолинейное и равномѣрное движеніе, то

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2b}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2c}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2}. \end{aligned}$$

Далѣе, проекціи силъ на подвижныя оси будутъ тѣ же, что и на неподвижныя оси. Поэтому уравненія движенія каждой точки, а, слѣдовательно, и уравненія движенія всей системы сохраняютъ тотъ же видъ, какъ будто оси $O'x'y'z'$ были неподвижными.

Въ частности мы можемъ написать для этихъ осей семь всеобщихъ уравненій движенія.

IV. — НѢКОТОРЫЕ ПРИМѢРЫ.

213. Предварительныя замѣчанія. — 1° Сумма моментовъ количествъ движенія точекъ твердаго тѣла около оси, вокругъ которой вращается твердое тѣло. — Разсмотримъ твердое тѣло, вращающееся вокругъ оси Oz съ угловою скоростью ω .

Пусть r и θ будутъ полярныя координаты проекціи точки $m(x, y, z)$ тѣла на плоскость xOy ; мы имѣемъ:

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mr^2 \omega.$$

Поэтому, если назовемъ черезъ Mk^2 моментъ инерціи тѣла около оси вращенія, то сумма моментовъ количествъ движенія всѣхъ точекъ тѣла около оси равна

$$\Sigma mr^2 \omega = Mk^2 \omega,$$

т. е. моменту инерціи около этой оси, умноженному на угловую скорость.

2° Живая сила твердаго тѣла, вращающагося вокругъ оси. — Назовемъ по предыдущему черезъ ω угловую скорость тѣла и черезъ r разстояніе точки m отъ оси. Линейная скорость точки m равна $v = r\omega$; живая сила тѣла есть, слѣдовательно,

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mr^2 \omega^2 = Mk^2 \omega^2.$$

Она равна моменту инерціи около оси, умноженному на квадратъ угловой скорости.

214. Приложение къ простымъ случаямъ. — Когда мы желаемъ примѣнить общія теоремы для изученія движенія системы, мы должны по возможности выбрать изъ семи уравненій тѣ, которыя не содержатъ силъ, обусловленныхъ связями системы.

Вотъ нѣсколько относящихся сюда примѣровъ.

1° Первый примѣръ. — Концы однородной матеріальной прямой AB , имѣющей массу m и длину $2a$, могутъ скользить безъ тренія по горизонтальной окружности радіуса R . Насѣкомое M такой же массы m находится въ серединѣ C прямой, которая предполагается неподвижной. Въ моментъ $t = 0$ насѣкомое начинаетъ двигаться вдоль стержня AB отъ точки C по направленію къ концу B , слѣдуя опредѣленному закону, такъ что отрѣзокъ CM выражается заданной функцией времени t , а именно $CM = \varphi(t)$. Найти движеніе системы; вычислить, на какой уголъ повернется прямая относительно своего начальнаго положенія, когда насѣкомое достигнетъ конца B .

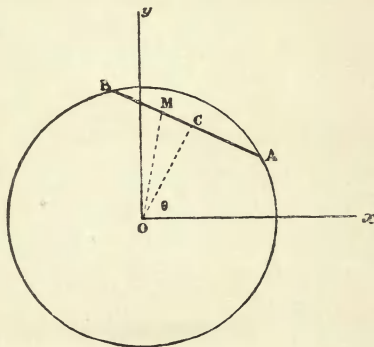
Назовемъ черезъ θ уголъ, образуемый нѣкоторой неподвижной осью съ радіусомъ-векторомъ, соединяющимъ центръ O съ серединой C прямой; черезъ l назовемъ постоянное разстояніе OC и черезъ u переменное разстояніе CM , такъ что $u = \varphi(t)$.

Внѣшнія силы, дѣйствующія на систему, составляемую прямой и насѣкомымъ, суть слѣдующія: 1° сила тяжести; 2° нормальныя реакціи окружности на концы A и B стержня.

Внутренними силами являются взаимодѣйствія молекулъ стержня AB , дѣйствія лапокъ насѣкомаго на стержень и соотвѣтственно равныя и противоположныя имъ реакціи стержня на лапки насѣкомаго.

Силы связи суть реакціи окружности на концы A и B , взаимодѣйствія насѣкомаго и стержня и взаимодѣйствія молекулъ стержня. Заданная сила есть вѣсь.

Чтобы опредѣлить движеніе системы, достаточно знать лишь уголъ θ въ функціи времени t . Для опредѣленія угла θ намъ достаточно будетъ



Фиг. 139.

одного уравненія, если только оно не будетъ содержать силъ связи.

Вообразимъ двѣ прямоугольныя оси Ox и Oy въ плоскости окружности и перпендикулярную къ ней ось Oz . Разсмотримъ, нѣтъ ли между семью всеобщими уравненіями такихъ, которыя были бы независимы отъ силъ связи.

Мы видимъ прежде всего, что всѣ три уравненія проекцій количествъ движенія или движенія центра тяжести содержатъ реакціи, приложенныя въ точкахъ A и B ; дѣйствительно, эти реакціи направлены нормально къ окружности внѣ плоскости xOy , и ихъ проекціи на каждую изъ трехъ осей отличны отъ нуля.

Далѣе, если возьмемъ уравненія моментовъ количествъ движенія около оси Ox или Oy , то увидимъ, что эти уравненія также содержатъ реакціи, приложенныя въ точкахъ A и B .

Уравненіе, выражающее теорему живыхъ силъ, не содержитъ реакцій въ точкахъ A и B ; дѣйствительно, такъ какъ перемѣщеніе каждой изъ точекъ A и B перпендикулярно къ соотвѣтственной реакціи, то работы реакцій, очевидно, равны нулю. Однако, это уравненіе содержитъ взаимодѣйствіе стержня и насѣкомаго, потому что разстояніе насѣкомаго отъ точекъ стержня, на которыя оно дѣйствуетъ, не остается неизмѣннымъ (п. 204).

Разсмотрим, наконецъ, послѣднее, еще не разсмотрѣнное нами уравненіе, которое выражаетъ теорему моментовъ количествъ движенія около оси Oz ; мы увидимъ, что это уравненіе не содержитъ вовсе силъ связи; имъ и опредѣлится уголъ θ . Дѣйствительно, моменты всѣхъ внѣшнихъ силъ около вертикальной прямой Oz , проходящей черезъ точку O , равны нулю, потому что силы тяжести параллельны оси Oz и нормальныя реакціи лежать въ плоскостяхъ, которыя нормальны къ окружности въ точкахъ A и B и содержать ось Oz . Поэтому сумма моментовъ количествъ движенія около оси Oz остается постоянной; такъ какъ вначалѣ наѣкомое и стержень были неподвижны, то эта сумма постоянно остается равной нулю. Вычислимъ эту сумму; она состоитъ изъ слѣдующихъ частей:

1° изъ суммы моментовъ количествъ движенія различныхъ точекъ стержня около оси Oz ; такъ какъ этотъ стержень есть твердое тѣло, вращающееся вокругъ оси Oz съ угловою скоростью $\frac{d\theta}{dt}$, то эта сумма равна $mk^2 \frac{d\theta}{dt}$, гдѣ mk^2 есть моментъ инерціи стержня около оси Oz ;

2° изъ момента количества движенія наѣкомаго M ; такъ какъ ϱ и $\alpha = \widehat{xOM}$ суть полярныя координаты точки M , то этотъ моментъ есть $m\varrho^2 \frac{d\alpha}{dt}$.

Мы имѣемъ, слѣдовательно:

$$k^2 \frac{d\theta}{dt} + \varrho^2 \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (1)$$

Изъ прямоугольнаго треугольника COM имѣемъ:

$$\varrho^2 = l^2 + u^2, \quad \alpha = \theta + \arctan \frac{u}{l}.$$

Такъ какъ u есть данная функція отъ времени t , то отсюда выводимъ:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt} + \frac{l}{l^2 + u^2} \frac{du}{dt}.$$

Подставивъ значеніе $\frac{d\alpha}{dt}$ въ уравненіе (1) и упростивъ, получимъ

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{l}{k^2 + l^2 + u^2} \frac{du}{dt},$$

откуда, интегрируя, находимъ:

$$\theta - \theta_0 = - \frac{l}{\sqrt{k^2 + l^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{k^2 + l^2}}; \quad (2)$$

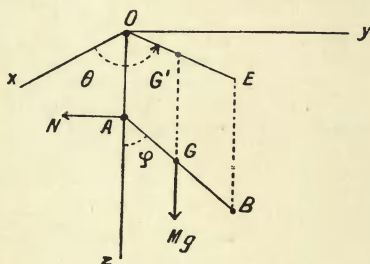
здѣсь θ_0 есть значеніе угла θ въ моментъ, когда наѣкомое выходитъ изъ точки C , т. е. когда $u = 0$. Другія написанныя выше уравненія дадутъ намъ теперь координаты ϱ и α въ функціи времени t . Въ моментъ, когда наѣко-

мое достигаетъ конца B , мы имѣемъ $u = a$; отсюда мы выводимъ соотвѣтственное значеніе разности $\theta - \theta_0$.

Опредѣлимъ въ точности величину k^2 . Моментъ инерціи стержня AB около его центра тяжести C равенъ $m \frac{a^2}{3}$ (п. 194); моментъ инерціи mk^2 стержня около оси Oz или около точки O равенъ (п. 195) $m \frac{a^2}{3} + ml^2$; слѣдовательно, $k^2 = \frac{a^2}{3} + l^2$.

Если въ какой-либо моментъ наше комое останавливается на прямой, то вся система становится неподвижной, такъ какъ въ противномъ случаѣ сумма моментовъ количествъ движенія не была бы нулемъ.

2° Второй примѣръ. — Дана система двухъ тяжелыхъ матеріальныхъ точекъ A и B (фиг. 140), имѣющихъ одинаковыя массы m и подчи-



Фиг. 140.

ненныхъ слѣдующимъ связямъ: двѣ точки связаны между собой твердымъ прямолинейнымъ стержнемъ AB , длина котораго равна $2l$ и который не имѣетъ массы; точка A должна перемѣщаться безъ тренія по неподвижной вертикальной оси Oz . Требуется найти движеніе этой системы при произвольно заданныхъ начальныхъ условіяхъ.

Вся масса системы есть $M = 2m$, а ея центръ тяжести G находится въ серединѣ стержня AB . Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси Ox и Oy въ горизонтальной плоскости. Положеніе системы зависитъ отъ трехъ геометрически независимыхъ параметровъ: координаты $G'G = \xi$ центра тяжести C , угла $zAB = \varphi$ и угла $xOE = \theta$, составляемаго горизонтальной проекціей OE стержня съ осью Ox .

Чтобы опредѣлить движеніе, мы должны найти эти три параметра въ функции времени t ; для этого нужно имѣть три уравненія, которыя не зависѣли бы отъ реакцій.

Внѣшнія силы, приложенныя къ системѣ, состоятъ изъ вѣса Mg твердаго тѣла AB , который приложенъ въ точкѣ G , и нормальной реакціи AN оси Oz ; проекціи реакціи на оси Ox и Oy мы назовемъ соотвѣтственно черезъ X и Y .

Разсмотримъ, нѣтъ ли между семью всеобщими уравненіями движенія такихъ, которыя не зависѣли бы отъ реакцій, т. е. отъ неизвѣстныхъ X и Y .

Уравненія движенія центра тяжести, относящіяся къ осямъ Ox и Oy , содержать соотвѣтственно неизвѣстныя X и Y ; третье же уравненіе, которе относится къ оси Oz ,

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = Mg$$

не зависитъ отъ реакціи; непосредственное интегрированіе его даетъ уравненіе

$$\zeta = \frac{1}{2} g t^2 + at + b, \quad (1)$$

гдѣ произвольныя постоянныя a и b выражаютъ начальныя значенія координаты ζ и ея производной по времени.

Въ уравненіяхъ моментовъ количествъ движенія, относящихся къ осямъ Ox и Oy , содержатся неизвѣстныя Y и X ; уравненіе же, относящееся къ оси Oz , не зависитъ отъ реакціи N , такъ какъ моментъ реакціи N около оси Oz есть нуль. Напишемъ это уравненіе. Такъ какъ моменты вѣшнихъ силъ (реакціи и вѣса) около оси Oz равны нулю, то имѣемъ

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C,$$

т. е. для проекціи движенія на плоскость xOy имѣетъ мѣсто теорема площадей. Но проекціей конца A служитъ неподвижная точка O , а проекція конца B на плоскость xOy имѣетъ полярный уголъ θ и радіусъ-векторъ $r = 2l \sin \varphi$. Поэтому въ лѣвой части предыдущаго уравненія остается одно только слагаемое, и уравненіе напишется въ видѣ $mr^2 \frac{d\theta}{dt} = C$, т. е.

$$\theta' \sin^2 \varphi = c, \quad (2)$$

гдѣ θ' есть производная угла θ по времени t , а c — постоянная, равная начальному значенію выраженія $\theta' \sin^2 \varphi$.

Наконецъ, теорема живыхъ силъ даетъ намъ третье уравненіе, независящее отъ силъ связи; дѣйствительно, работа реакціи N равна нулю, такъ какъ реакція нормальна къ перемѣщенію ея точки приложенія A , а работы внутреннихъ силъ равны нулю, такъ какъ система состоитъ изъ одного лишь твердаго тѣла. Мы имѣемъ такимъ образомъ уравненіе.

$$d \frac{1}{2} \Sigma m v^2 = Mg d \zeta,$$

правая часть котораго выражаетъ элементарную работу вѣса Mg , приложеннаго въ точкѣ G . Интегрированіе приводитъ къ уравненію

$$\Sigma m v^2 = 2Mg \zeta + h,$$

гдѣ h есть постоянная, равная начальному значенію выраженія $\Sigma m v^2 - 2Mg \zeta$. Введемъ въ это уравненіе избранные нами параметры. Сумма $\Sigma m v^2$ состоитъ изъ двухъ слагаемыхъ, соотвѣтствующихъ двумъ концамъ A и B , такъ какъ стержень AB не имѣетъ массы. Точка A имѣетъ координату $z = \zeta - l \cos \varphi$;

квадратъ ея скорости, слѣдовательно, равенъ

$$v_1^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = (\zeta' + l \sin \varphi \varphi')^2,$$

гдѣ ζ' и φ' обозначаютъ производныя по t . Цилиндрическія координаты точки B (п. 38) равны

$$r = 2l \sin \varphi, \quad \theta, \quad z = \zeta + l \cos \varphi;$$

слѣдовательно, квадратъ ея скорости равенъ

$$v_2^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2 + z'^2 = 4l^2 \cos^2 \varphi \varphi'^2 + 4l^2 \sin^2 \varphi \theta'^2 + (\zeta' - l \sin \varphi \varphi')^2.$$

Раскрывъ скобки и упростивъ, получимъ

$$\Sigma m v^2 = m (v_1^2 + v_2^2) = M [\zeta'^2 + l^2 (1 + \cos^2 \varphi) \varphi'^2 + 2l^2 \sin^2 \varphi \theta'^2],$$

гдѣ $M = 2m$; уравненіе живыхъ силъ получаетъ теперь слѣдующій видъ

$$\zeta'^2 + l^2 (1 + \cos^2 \varphi) \varphi'^2 + 2l^2 \sin^2 \varphi \theta'^2 = 2g\zeta + k; \quad (3)$$

здѣсь k обозначаетъ постоянную, равную частному отъ дѣленія постоянной h на массу M . Полученными такимъ образомъ тремя уравненіями (1), (2) и (3) опредѣляются координаты ζ , θ и φ въ функціи отъ t .

Если не считать заключительнаго изслѣдованія, то роль механики здѣсь кончена, и мы стоимъ передъ задачей интегральнаго исчисленія. Замѣняя въ уравненіи (3) координату ζ ея выраженіемъ (1), мы увидимъ, что выраженіе $\zeta'^2 - 2g\zeta$ сводится къ постоянной $a^2 - 2gb$, и уравненіе (3) получаетъ слѣдующій видъ:

$$(1 + \cos^2 \varphi) \varphi'^2 + 2 \sin^2 \varphi \theta'^2 = \lambda; \quad (4)$$

здѣсь мы обозначили черезъ λ постоянную $\frac{k - a^2 + 2gb}{l^2}$. Исключивъ θ' при помощи уравненія (2),

$$\theta' = \frac{c}{\sin^2 \varphi}, \quad (5)$$

мы получимъ уравненіе

$$\sin^2 \varphi (1 + \cos^2 \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \lambda \sin^2 \varphi - 2c^2$$

и отсюда найдемъ, наконецъ, уравненіе

$$dt = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \varphi}{\lambda \sin^2 \varphi - 2c^2}} \sin \varphi d\varphi, \quad (6)$$

которое при помощи квадратуры даетъ намъ время t въ функціи угла φ . Соотношеніе (5), написанное въ видѣ

$$d\theta = \frac{c dt}{\sin^2 \varphi} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \varphi}{\lambda \sin^2 \varphi - 2c^2}} \frac{c d\varphi}{\sin \varphi}, \quad (7)$$

равнымъ образомъ дать намъ уголъ θ въ функціи отъ φ при помощи квадратуры. Посредствомъ элементарныхъ функцій нельзя выполнить этихъ квадратуръ, но мы можемъ тѣмъ не менѣе, какъ мы уже видѣли въ задачѣ о математическомъ маятникѣ, выяснить себѣ главныя обстоятельства движенія. Прежде всего знакъ передъ радикаломъ въ начальный моментъ опредѣляется знакомъ производной q'' въ этотъ моментъ. Далѣе, такъ какъ дифференціалъ dt долженъ быть вещественнымъ, то $2c^2 < \lambda$, и значенія $\sin^2 \varphi$ колеблются между 1 и $\frac{2c^2}{\lambda}$. Поэтому уголъ φ , начальное значеніе котораго φ_0 заключено между 0 и π , колеблется между острымъ угломъ α , который опредѣляется равенствомъ $\sin^2 \alpha = \frac{2c^2}{\lambda}$, и тупымъ угломъ $\pi - \alpha$. Въ промежуткѣ въ теченіе котораго уголъ φ возрастаетъ отъ значенія α до $\pi - \alpha$, передъ радикаломъ (6) нужно брать знакъ $+$, а въ періодѣ убыванія отъ $\pi - \alpha$ до α нужно брать знакъ $-$. Мы имѣемъ здѣсь случай, аналогичный простому маятнику.

Уголъ θ въ то же время измѣняется постоянно въ одномъ и томъ же направленіи, потому что производная θ' имѣетъ, согласно уравненію (5), постоянный знакъ; плоскость OAB вращается, слѣдовательно, вокругъ оси Oz постоянно въ одну сторону съ угловой скоростью θ' , которая измѣняется отъ значенія c до $\frac{c}{\sin^2 \alpha}$. Наконецъ, согласно уравненію (1), проекція точки G на ось Oz падаетъ, какъ тяжелая точка. Такимъ образомъ мы можемъ представить себѣ количественную сторону движенія.

Если $c=0$, то движеніе происходитъ въ неподвижной плоскости, проходящей черезъ ось Oz , потому что $\theta'=0$, $\theta=\text{const}$.

Если система вначалѣ находится въ покоѣ, то начальныя значенія производныхъ ζ' , θ' и φ' равны нулю, постоянныя α , c и λ суть нули, и мы имѣемъ:

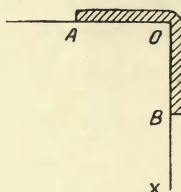
$$\zeta = \frac{1}{2} g t^2 + \zeta_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Стержень падаетъ, сохраняя неизмѣнное направленіе.

3^о Третій примѣръ. — Тяжелую однородную цѣпь AOB съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ кладутъ на совершенно гладкую, горизонтальную доску такимъ образомъ, чтобы одна часть лежала въ видѣ прямолинейнаго отрѣзка AO на доскѣ до края O доски, и чтобы остальная часть OB висѣла вертикально. Найти законъ движенія цѣпи, если ея начальная скорость равна нулю.

Назовемъ черезъ l длину цѣпи, черезъ ρ — ея линейную плотность и черезъ $M = l\rho$ — ея массу. За ось Ox примемъ вертикальную прямую, направленную изъ точки O внизъ (фиг. 141), и обозначимъ черезъ x длину OB висѣющей части въ какой-либо моментъ t . Въ начальный моментъ $t=0$ дли-

на x имѣть заданное значеніе x_0 , и ея производная x'_0 равна нулю, потому что начальная скорость есть нуль. Для опредѣленія длины x въ функціи отъ времени t достаточно одного уравненія, если только оно не зависить отъ силъ связи. Это уравненіе дается намъ теоремой живыхъ силъ.



Фиг. 141.

Элементарныя работы внѣшнихъ силъ. — Когда цѣпь перемѣстится на элементъ dx , элементарныя работы нормальныхъ реакцій доски на часть AO будутъ равны нулю; точно такъ же равна нулю и элементарная работа, произведенная вѣсомъ звеньевъ этой части. Каждое звено массы m вертикальной части OB опускается внизъ на элементъ dx ; работа его вѣса равна $mgdx$, и сумма этихъ работъ равна $\sum mg dx$, гдѣ знакъ суммы распространяется на звенья части OB ; но $\sum m$ есть масса части OB и равна ρx , слѣдовательно, сумма работъ равна $\rho xg dx$.

Элементарныя работы внутреннихъ силъ. — Внутренними силами здѣсь являются взаимодѣйствія между каждыми двумя смежными звеньями; такія два звена можно разсматривать, какъ матеріальныя точки, разстояніе между которыми остается постояннымъ, такъ что работа ихъ взаимодѣйствія равна нулю (п. 204).

Съ другой стороны, живая сила системы равна $\sum mv^2 = Mx'^2$ или $l\rho x'^2$, такъ какъ всѣ точки, очевидно, имѣютъ скорость v , равную скорости x' точки B . Мы имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$d \left(\frac{1}{2} l \rho x'^2 \right) = \rho xg dx,$$

$$x'' = \frac{g}{l} x.$$

Точка B движется, слѣдовательно, какъ свободная точка, отталкиваемая точкой O съ силой, прямо пропорціональной разстоянію (п. 152) Такъ какъ начальная скорость по предположенію равна нулю, то, интегрируя и полагая $\frac{g}{l} = \omega^2$, мы найдемъ, что

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Это уравненіе даетъ намъ движеніе отъ момента $t = 0$ до момента t_1 , опредѣляемого равенствомъ $x = l$. Цѣпь въ этотъ моментъ оставляетъ столъ и свободно падаетъ, имѣя ускореніе g .

V. — ТЕОРЕМЫ КИНЕМАТИКИ, ПОСРЕДСТВОМЪ КОТОРЫХЪ ВЫЧИСЛЯЮТСЯ МОМЕНТЫ КОЛИЧЕСТВЪ ДВИЖЕНІЯ И ЖИВАЯ СИЛА.

215. Опредѣленіе относительнаго движенія системы вокругъ ея центра тяжести. — Разсмотримъ систему, которая движется относительно неподвижныхъ осей $Oxyz$. Черезъ центръ тяжести G этой системы проведемъ оси $Gx'y'z'$, параллельныя неподвижнымъ осямъ. Движеніе системы относительно этихъ осей называется относительнымъ движеніемъ системы вокругъ ея центра тяжести.

216. Вычисленіе суммы моментовъ количествъ движенія около неподвижной оси. — Введя это относительное движеніе, мы можемъ установить слѣдующую теорему.

Теорема. — Сумма моментовъ количествъ движенія около неподвижной оси равна моменту количества движенія всей массы системы, перенесенной въ центръ тяжести, плюсъ сумма моментовъ количествъ движенія около оси, которая параллельна первой и проходитъ черезъ центръ тяжести, при чемъ послѣдняя сумма вычисляется въ относительномъ движеніи вокругъ центра тяжести.

Доказательство вытекаетъ непосредственно изъ элементарныхъ формулъ преобразованія координатныхъ осей.

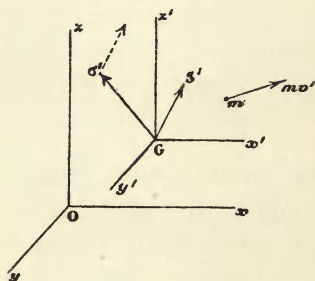
Обозначимъ черезъ ξ, η, ζ координаты центра тяжести, черезъ x, y, z координаты точки системы относительно неподвижныхъ осей и черезъ x', y', z' координаты той же точки относительно осей Gx', Gy', Gz' , которыя параллельны неподвижнымъ осямъ и проведены черезъ центръ тяжести; по формуламъ преобразованія координатъ имѣемъ:

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y', \quad z = \zeta + z' \quad (1)$$

Вычислимъ, напримѣръ, сумму моментовъ количествъ движенія различныхъ точекъ системы около оси Oz .

Пользуясь формулами преобразования координатъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} & \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \\ &= \sum \left[m (\xi + x') \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'}{dt} \right) - m (\eta + y') \left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'}{dt} \right) \right] \\ &= \sum m \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) \\ &+ \sum m x' \frac{d\eta}{dt} - \sum m y' \frac{d\xi}{dt} + \sum m \xi \frac{dy'}{dt} - \sum m \eta \frac{dx'}{dt}. \end{aligned}$$



Фиг. 142.

Но центръ тяжести находится въ подвижномъ началѣ координатъ; поэтому

$$\sum m x' \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \sum m x' = 0, \quad \sum m y' \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Далѣе,

$$\sum m \xi \frac{dy'}{dt} = \xi \sum m \frac{dy'}{dt} = 0, \quad \sum m \eta \frac{dx'}{dt} = 0,$$

ибо количества $\sum m x'$ и $\sum m y'$, будучи равны нулю, имѣютъ производныя, равныя нулю.

Имѣя въ виду эти соотношенія, мы получимъ уравненіе

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right), \quad (2)$$

потому что въ первой суммѣ правой части можно вынести множителя $\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right)$, а $\sum m = M$.

Послѣднее уравненіе и выражаетъ въ точности теорему, которую мы желали доказать; дѣйствительно, первый членъ $M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right)$ есть моментъ количества движенія около оси Oz всей массы системы, сосредоточенной въ центрѣ тяжести G , а второй членъ $\sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right)$ выражаетъ сумму моментовъ количествъ движенія около оси Gz' , которая параллельна оси Oz , и эта сумма вычислена для относительнаго движенія системы вокругъ центра тяжести G .

217. Упрощеніе вычисленія живой силы. — Докажемъ относительно вычисленія живой силы теорему, аналогичную предыдущей.

ТЕОРЕМА КѢНИГА (Koenig). — Живая сила системы равна живой силѣ, которую имѣла бы система, если бы вся ея масса была сосредоточена въ центрѣ тяжести, плюсъ живая сила системы въ ея движеніи относительно осей, имѣющихъ неизмѣнное направленіе и проведенныхъ черезъ центръ тяжести.

Мы будемъ пользоваться такими же обозначеніями, какъ и въ предыдущемъ пунктѣ. Формулы преобразованія координатъ

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y', \quad z = \zeta + z'$$

даютъ для квадрата абсолютной скорости точки ^{массы} m слѣдующее выраженіе:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{d\xi + dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta + dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta + dz'}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{dx'}{dt} \frac{d\xi}{dt} + 2 \frac{dy'}{dt} \frac{d\eta}{dt} + 2 \frac{dz'}{dt} \frac{d\zeta}{dt}, \end{aligned}$$

или, обозначивъ черезъ V скорость центра тяжести и черезъ v' относительную скорость точки ^{массы} M , имѣемъ

$$v^2 = V^2 + v'^2 + 2 \frac{dx'}{dt} \frac{d\xi}{dt} + 2 \frac{dy'}{dt} \frac{d\eta}{dt} + 2 \frac{dz'}{dt} \frac{d\zeta}{dt};$$

умноживъ это уравненіе на m и сложивъ почленно всѣ аналогичныя уравненія, мы найдемъ:

$$\sum mv^2 = MV^2 + \sum mv'^2 + 2 \frac{d\xi}{dt} \sum m \frac{dx'}{dt} + 2 \frac{d\eta}{dt} \sum m \frac{dy'}{dt} + 2 \frac{d\zeta}{dt} \sum m \frac{dz'}{dt};$$

коэффициенты при производныхъ $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ равны нулю въ силу соотношеній

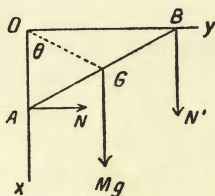
$$\sum mx' = 0, \quad \sum my' = 0, \quad \sum mz' = 0,$$

выражающихъ, что началомъ подвижныхъ осей служить центръ тяжести. Мы получаемъ такимъ образомъ уравненіе

$$\sum mv^2 = MV^2 + \sum mv'^2,$$

что и требовалось доказать.

Приложеніе. — Найдёмъ движеніе тяжелаго однороднаго безконечно тонкаго стержня, который имѣетъ длину $2l$ и концы котораго скользятъ безъ тренія по двумъ неподвижнымъ осямъ: вертикальной Ox и горизонтальной Oy . Положеніе стержня зависитъ отъ угла $xOG = \theta$ между осью Ox и радіусомъ OG , соединяющимъ начало съ центромъ тяжести G , т. е. серединой стержня AB (фиг. 143). Примѣнимъ теорему живыхъ силъ. Живая сила складывается изъ живой силы $MV^2 = Ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ всей массы, перенесенной въ центръ G , и изъ живой силы $\sum mv'^2$ въ движеніи относительно осей $Gx'y'$,



Фиг. 143.

параллельныхъ неподвижнымъ осямъ; послѣднее движеніе есть вращеніе съ угловой скоростью $\frac{d\theta}{dt}$ вокругъ оси Gz' , перпендикулярной къ плоскости xOy ; количество $\sum mv'^2$ равно, слѣдовательно, $I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, гдѣ I обозначаетъ моментъ инерціи $M \frac{l^2}{3}$ стержня относительно его центра (п. 194). Поэтому

$$\sum mv^2 = M \frac{4}{3} l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Съ другой стороны, работа внутреннихъ силъ равна нулю такъ же, какъ и работа нормальныхъ къ осямъ реакцій, дѣйствующихъ въ точкахъ A и B , а элементарная работа вѣса Mg равна $Mg d\xi$ или $-Mgl \sin \theta d\theta$, такъ какъ $\xi = l \cos \theta$. Такимъ образомъ:

$$d \left[M \frac{2}{3} l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -Mgl \sin \theta d\theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{4l} \sin \theta.$$

Это уравненіе тождественно съ уравненіемъ движенія математическаго маятника, имѣющаго въ длину $\frac{4}{3}l$; такимъ образомъ мы привели задачу къ вопросу, который уже подробно разобрать нами (п. 176).

VI. — ТЕОРЕМЫ О МОМЕНТАХЪ И О ЖИВЫХЪ СИЛАХЪ ВЪ ОТНОСИТЕЛЬНОМЪ ДВИЖЕНІИ ВОКРУГЪ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ.

218. Теорема о моментахъ количествъ движенія въ относительно движеніи вокругъ центра тяжести. — Какъ мы показали, теорема о моментахъ количествъ движенія имѣетъ мѣсто для движенія системы относительно неподвижныхъ осей или относительно осей постоянного направленія, имѣющихъ равномерное и прямолинейное поступательное движеніе (п. 212). Если бы мы пожела-ли изучитъ движеніе системы относительно произвольныхъ подвижныхъ осей, то мы могли бы примѣнить эту теорему лишь въ измѣненномъ видѣ, а именно, введя нѣкоторые дополнительные члены, которые мы опредѣлили въ п. 186, въ теоріи относительнаго движенія. Но существуетъ такая частная система подвижныхъ осей, что при изученіи движенія системы относительно этихъ осей мы можемъ примѣнить къ нему теорему о моментахъ количествъ движенія въ неизмѣнномъ видѣ. Это суть оси постоянного направленія, проходящія черезъ центръ тяжести. Свойство этихъ осей формулируется слѣдующимъ образомъ: теорема о моментахъ количествъ движенія примѣняется къ движенію системы относительно осей постоянного направленія, проходящихъ черезъ центръ тяжести.

Для доказательства мы сопоставимъ уравненія движенія центра тяжести съ уравненіями моментовъ въ абсолютномъ движеніи; мы уви-

димъ, что новыя полученныя уравненія не отличаются отъ первыхъ шести всеобщихъ уравненій.

Представимъ себѣ, какъ выше (п.п. 216 и 217), систему осей $Gx'y'z'$, параллельныхъ неподвижнымъ осямъ и имѣющихъ начало въ центрѣ тяжести; мы будемъ исходить изъ уравненія моментовъ относительно оси Oz :

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum (x Y_e - y X_e); \quad (1)$$

сдѣлаемъ въ этомъ уравненіи преобразование координатъ, пользуясь формулами

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y', \quad z = \zeta + z'.$$

Мы видѣли (п. 216), что

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right).$$

Съ другой стороны, ясно, что

$$\sum \sum (x Y_e - y X_e) = \sum \sum (\xi Y_e - \eta X_e) + \sum \sum (x' Y_e - y' X_e).$$

Слѣдовательно, замѣщая обѣ части уравненія (1) ихъ значеніями и замѣтивъ, что

$$\frac{d}{dt} M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) = M \left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} \right),$$

мы получимъ уравненіе

$$\begin{aligned} M \left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} \right) + \frac{d}{dt} \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) \\ = \xi \sum \sum Y_e - \eta \sum \sum X_e + \sum \sum (x' Y_e - y' X_e); \end{aligned}$$

которое приводится къ виду

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = \sum \sum (x' Y_e - y' X_e), \quad (2)$$

ибо уравненія движенія центра тяжести даютъ:

$$M \frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum \sum Y_e, \quad M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum \sum X_e.$$

Теорема такимъ образомъ доказана; дѣйствительно, полученное уравненіе (2) имѣетъ такой же видъ, какъ и уравненіе (1) мо-

ментовъ около оси Oz въ абсолютномъ движеніи, съ тѣмъ лишь отличіемъ, что абсолютныя координаты x, y, z замѣнены относительными координатами.

Взявъ моменты около осей Gx' и Gy' , мы получимъ два аналогичныхъ уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) &= \sum \sum (y' Z_e - z' Y_e), \\ \frac{d}{dt} \sum m \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) &= \sum \sum (z' X_e - x' Z_e). \end{aligned}$$

Геометрическое доказательство. — Тотъ же результатъ можно получить болѣе короткимъ путемъ, исходя изъ теоріи относительнаго движенія. Въ разсматриваемомъ движеніи переносное движеніе есть движеніе поступательное; поэтому сложная центробѣжная сила равна нулю, а центробѣжная сила равна $-mJ$, гдѣ J обозначаетъ ускореніе переноснаго движенія, т. е. ускореніе центра тяжести, имѣющее проекціи $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Если мы введемъ эту фиктивную силу, то движеніе будетъ такимъ же, какъ если бы подвижныя оси были неподвижными. Мы можемъ примѣнить къ этому движенію теорему о моментахъ количествъ движенія:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) &= \sum \sum (x' Y_e - y' X_e) - \sum m \left(x' \frac{d^2\eta}{dt^2} - y' \frac{d^2\xi}{dt^2} \right) \\ &= \sum \sum (x' Y_e - y' X_e) - \frac{d^2\eta}{dt^2} \sum mx' + \frac{d^2\xi}{dt^2} \sum my', \end{aligned}$$

и такъ какъ центръ тяжести служить началомъ, то

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = \sum \sum (x' Y_e - y' X_e),$$

что и требовалось доказать.

219. Геометрическая интерпретація. — Какъ и въ случаѣ абсолютнаго движенія (п. 202), эта теорема допускаетъ простое геометрическое истолкованіе. Пусть $G\sigma'$ (фиг. 144) будетъ главнымъ моментомъ около центра тяжести G векторовъ, представляющихъ относительныя количества движенія mv' , и пусть GS' будетъ главнымъ моментомъ внѣшнихъ силъ. Наша теорема выражаетъ, что скорость

относительно осей $Gx'y'z'$ конца σ' первого момента равна и параллельна другому моменту GS' .

Приложения: 1° Теорема площадей. — Если сумма моментов внешних сил равна нулю около оси, имѣющей постоянное направление и проходящей черезъ центръ тяжести, напримѣръ, около оси Gz' , то

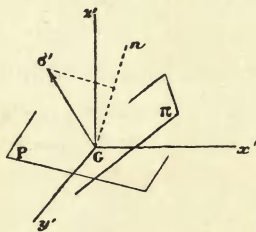
$$\sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = C. \quad (3)$$

Теорема площадей примѣняется въ этомъ случаѣ къ проекціи относительнаго движенія на плоскость $x'Gy'$, и центромъ площадей служить точка G .

2° Главный моментъ внешнихъ силъ около точки G равенъ нулю. — Если внешнихъ силъ нѣтъ или если сумма моментовъ этихъ силъ около осей Gx' , Gy' , Gz' постоянно равна нулю, то мы имѣемъ интегралъ (3) и два аналогичныхъ интеграла

$$\left. \begin{aligned} \sum m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) &= A, \\ \sum m \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right) &= B. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Въ этомъ случаѣ отрѣзокъ GS' равенъ нулю; точка σ' имѣетъ относительную скорость нуль, и отрѣзокъ $G\sigma'$ остается постояннымъ по величинѣ и направленію: его проекціи на три оси Gx' , Gy' , Gz'



Фиг. 144.

равны соотвѣтственно постояннымъ A , B , C . Теперь теорема площадей примѣняется къ проекціи относительнаго движенія на любую плоскость P , имѣющую постоянное направление и проходящую черезъ центръ тяжести, такъ какъ эту плоскость мы всегда

можемъ принять за плоскость $x'Gy'$. Постоянная площадей на этой плоскости P равна проекции отръзка $G\sigma'$ на перпендикуляръ Gn къ плоскости. Слѣдовательно, на плоскости Π , перпендикулярной къ главному моменту $G\sigma'$, эта постоянная имѣетъ значеніе максимумъ; эта плоскость называется плоскостью максимума площадей. На плоскости, проходящей черезъ главный моментъ $G\sigma$, постоянная площадей равна нулю.

Предположимъ, напримѣръ, что тяжелое тѣло (твердое тѣло, цѣпь и т. п.) брошено въ пустотѣ. Его центръ тяжести описываетъ относительно земли параболу; проведемъ черезъ точку G оси $Gx'y'z'$, имѣющія неизмѣнное направленіе, при чемъ ось Gz' направимъ по вертикали; внѣшнія силы — это вѣса, коихъ проекціи суть

$$X_e = 0, \quad Y_e = 0, \quad Z_e = -mg.$$

Сумма ихъ моментовъ около каждой изъ трехъ осей $Gx'y'z'$ равна нулю, потому что

$$\Sigma mx' = \Sigma my' = \Sigma mz' = 0.$$

Теорема площадей примѣняется къ проекціи относительнаго движенія на каждую изъ трехъ координатныхъ плоскостей системы $Gx'y'z'$; векторъ $G\sigma'$ остается постояннымъ, и плоскость, перпендикулярная къ нему, есть плоскость максимума площадей.

220. Теорема живыхъ силъ въ относительномъ движеніи вокругъ центра тяжести. — Мы установили теорему живыхъ силъ для абсолютнаго движенія системы. Эта теорема сохраняетъ силу также и въ случаѣ движенія относительно осей, имѣющихъ равномерное прямолинейное поступательное движеніе. Но относительно осей, движущихся произвольнымъ образомъ, наша теорема примѣнима лишь въ измѣненномъ видѣ. Существуетъ, однако, частная система подвижныхъ осей, относительно которыхъ теорема сохраняетъ силу въ неизмѣненномъ видѣ: это система осей, имѣющихъ неподвижное направленіе и проходящихъ черезъ центръ тяжести. Мы имѣемъ такимъ образомъ слѣдующую теорему:

Теорема живыхъ силъ, подобно теоремѣ о моментахъ количествъ движенія, примѣняется къ движенію системы относительно осей, имѣющихъ неподвижное направленіе и проходящихъ черезъ центръ тяжести.

Докажемъ эту теорему, связывая уравненія движенія центра тяжести съ уравненіями живыхъ силъ въ абсолютномъ движеніи; такъ что уравненіе, которое мы получимъ, будетъ слѣдствіемъ всеобщихъ уравненій.

Уравненіе живыхъ силъ въ абсолютномъ движеніи имѣетъ форму

$$\frac{d \Sigma mv^2}{2} = \Sigma \Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) + \Sigma \Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz); \quad (5)$$

произведемъ въ немъ преобразованіе координатъ:

$$x = \xi + x', \quad y = \eta + y', \quad z = \zeta + z'.$$

Обозначимъ черезъ V скорость центра тяжести G и черезъ v' скорость молекулы m по отношенію къ осямъ $Gx'y'z'$; по теоремѣ Кёнига (п. 217)

$$\Sigma mv^2 = MV^2 + \Sigma mv'^2.$$

Съ другой стороны,

$$dx = d\xi + dx', \quad dy = d\eta + dy', \quad dz = d\zeta + dz'.$$

Уравненіе (5) получаетъ поэтому слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} d \frac{MV^2}{2} + d \frac{\Sigma mv'^2}{2} \\ = \Sigma \Sigma (X_i dx' + Y_i dy' + Z_i dz') + \Sigma \Sigma (X_e dx' + Y_e dy' + Z_e dz') \\ + d\xi \{ \Sigma \Sigma X_i + \Sigma \Sigma X_e \} + d\eta \{ \Sigma \Sigma Y_i + \Sigma \Sigma Y_e \} + d\zeta \{ \Sigma \Sigma Z_i + \Sigma \Sigma Z_e \}. \end{aligned}$$

Но въ силу принципа равенства дѣйствія и противодѣйствія суммы $\Sigma \Sigma X_i$, $\Sigma \Sigma Y_i$, $\Sigma \Sigma Z_i$ равны нулю; далѣе, составивъ уравненіе живыхъ силъ для движенія центра тяжести, получимъ:

$$d \frac{MV^2}{2} = d\xi \Sigma \Sigma X_e + d\eta \Sigma \Sigma Y_e + d\zeta \Sigma \Sigma Z_e.$$

Такимъ образомъ, послѣ упрощеній остается уравненіе:

$$d \frac{\Sigma mv'^2}{2} = \Sigma \Sigma (X_i dx' + Y_i dy' + Z_i dz') + \Sigma \Sigma (X_e dx' + Y_e dy' + Z_e dz').$$

Это уравненіе составлено изъ относительныхъ скоростей и перемѣщеній такъ, какъ уравненіе живыхъ силъ — изъ абсолютныхъ скоростей и перемѣщеній. Такимъ образомъ наша теорема доказана.

Замѣчаніе о работахъ внѣшнихъ силъ. — Сумма элементарныхъ работъ внутреннихъ силъ, которая зависитъ лишь отъ измѣненій разстояній между точками, одинакова въ обоихъ уравненіяхъ; напротивъ, суммы работъ внѣшнихъ силъ въ этихъ двухъ уравненіяхъ различны.

Это вытекаетъ изъ предыдущаго вычисленія; дѣйствительно, мы нашли, что

$$\Sigma\Sigma (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) = \Sigma\Sigma (X_i dx' + Y_i dy' + Z_i dz'),$$

т. е. суммы элементарныхъ работъ внутреннихъ силъ однѣ и тѣ же въ абсолютномъ перемѣщеніи и въ перемѣщеніи относительно разсматриваемыхъ осей. Съ другой стороны, мы нашли, что

$$\begin{aligned} \Sigma\Sigma (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz) \\ = \Sigma\Sigma (X_e dx' + Y_e dy' + Z_e dz') + \Sigma\Sigma (X_e d\xi + Y_e d\eta + Z_e d\zeta), \end{aligned}$$

откуда видно, что этимъ двумъ перемѣщеніямъ соотвѣтствуютъ различныя суммы работъ внѣшнихъ силъ.

Такимъ образомъ, если нѣкоторыя тѣла системы соединены связями безъ тренія съ неподвижными тѣлами, то соотвѣтствующія силы связи будутъ внѣшними по отношенію къ системѣ, а ихъ элементарныя работы при абсолютномъ перемѣщеніи равны нулю, какъ мы докажемъ въ теоремѣ о возможныхъ скоростяхъ; при перемѣщеніи же относительно осей $Gx'y'z'$ эти работы, вообще, не равны нулю.

Напримѣръ, если мы примѣнимъ теорему живыхъ силъ къ относительному движенію вокругъ центра тяжести G въ задачѣ о стержнѣ, разобранной нами въ концѣ п. 217, то работы реакцій осей Ox и Oy на концы A и B стержня въ относительномъ перемѣщеніи будутъ отличны отъ нуля.

Доказательство, основанное на теоріи относительнаго движенія. — Движеніе, отнесенное къ осямъ $Gx'y'z'$, мы можемъ разсматривать, какъ абсолютное движеніе, если къ каждой точкѣ системы приложимъ двѣ фиктивныя силы: центробѣжную силу и сложную центробѣжную. Переносное движеніе здѣсь сводится къ поступательному, а сложныя центробѣжныя силы равны нулю.

Проекции центробѣжной силы, приложенной къ точкѣ массы m , равны

$$-m \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

Приложивъ фиктивные силы, примѣнимъ къ этому абсолютному движенію теорему живыхъ силъ; мы получимъ уравненіе

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d \sum m v'^2 &= \sum \sum (X_i dx' + Y_i dy' + Z_i dz') \\ &+ \sum \sum (X_e dx' + Y_e dy' + Z_e dz') \\ &- \frac{d^2 \xi}{dt^2} \sum m dx' - \frac{d^2 \eta}{dt^2} \sum m dy' - \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \sum m dz', \end{aligned}$$

которое приводится къ искомому, потому что

$$\sum m \frac{dx'}{dt} = \sum m \frac{dy'}{dt} = \sum m \frac{dz'}{dt} = 0.$$

221. Наибольшее возможное число независимыхъ обшихъ уравненій. — Примѣняя теоремы о моментахъ и живыхъ силахъ къ относительному движенію вокругъ центра тяжести, мы получимъ четыре уравненія. Но эти уравненія не отличаются отъ семи всеобщихъ уравненій, а, какъ мы замѣтили, являются ихъ слѣдствіями. Смотря по обстоятельствамъ, можетъ оказаться болѣе удобнымъ написать уравненія моментовъ и живыхъ силъ въ абсолютномъ движеніи или же въ движеніи вокругъ центра тяжести.

VII. — ЭНЕРГІЯ.

222. Консервативная система. — Разсмотримъ систему, въ которой внутреннія силы (X_i, Y_i, Z_i) зависятъ лишь отъ положеній точекъ и являются производными силовой функціи

$$U_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

которую мы будемъ считать однозначной. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ тождественно

$$\sum \sum (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) = dU_i.$$

Это имѣетъ мѣсто въ частности, когда взаимодействіе F каждой пары точекъ системы зависитъ лишь отъ разстоянія между ними. Дѣйствительно, тогда

$$F = \varphi(r), \quad F dr = d \int \varphi(r) dr;$$

а такъ какъ каждый членъ суммы $\sum F dr$ есть точный дифференціалъ, то и сама сумма будетъ точнымъ дифференціаломъ.

Когда существуетъ такая функція U_i , система называется консервативной. Функцію ($-U_i$) называютъ потенціальной энергіей; сумма $\sum \frac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергіей или явной энергіей; сумма этихъ двухъ количествъ называется полной энергіей.

Уравненіе живыхъ силъ мы напишемъ такъ:

$$d \left(\sum \frac{mv^2}{2} - U_i \right) = \sum \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz); \quad (1)$$

мы видимъ, что бесконечно малое измѣненіе полной энергіи суммы равно суммѣ элементарныхъ работъ внѣшнихъ силъ.

Въ математической физикѣ теоремой живыхъ силъ пользуются главнымъ образомъ въ этомъ видѣ.

Если внѣшнихъ силъ нѣтъ, то правая часть уравненія (1) равна нулю; полная энергія въ этомъ случаѣ есть величина постоянная. Въ этомъ заключается механическое содержаніе теоремы о сохраненіи энергіи. Такимъ образомъ, если консервативная система перемѣщается безъ всякаго дѣйствія внѣшнихъ силъ, то кинетическая энергія (зависящая лишь отъ скоростей различныхъ точекъ) и потенціальная энергія (зависящая лишь отъ конфигураціи системы) обѣ измѣняются, но ихъ сумма остается постоянной. Эти два вида энергіи превращаются одинъ въ другой, хотя они и различной природы. Они измѣряются единицами одного и того же рода, а именно, эргами въ системѣ С. Г. С. и килограмметрами — въ технической системѣ единицъ.

<http://mathesis.ru>

ГЛАВА X.

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

I. — ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА ВОКРУГЪ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

223. Уравненіе движенія. — Положеніе твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, зависитъ лишь отъ одного параметра: отъ угла θ между плоскостью, проходящей черезъ ось и неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, и неподвижной плоскостью, проходящей черезъ ось. Поэтому одного уравненія достаточно, чтобы опредѣлить движеніе. Когда это имѣетъ мѣсто, то говорятъ, что рассматриваемая матеріальная система есть система полносвязная.

Изучая равновѣсіе твердаго тѣла, которое вращается безъ тренія вокругъ неподвижной оси, мы видѣли, что реакціи оси можно рассматривать, какъ силы R' , R'' , R''' , ..., исходящія отъ оси.

Мы можемъ рассматривать твердое тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, какъ свободное тѣло, которое движется подъ дѣйствіемъ этихъ силъ и реакцій оси. Теорема живыхъ силъ дастъ намъ уравненіе движенія, потому что работы реакцій, очевидно, равны нулю: дѣйствительно, мы можемъ принять, что реакціи приложены къ точкамъ тѣла, которыя лежатъ на оси и потому неподвижны.

Ось вращенія мы примемъ за ось Oz ; угловая скорость ω тѣла

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

если обозначить через Mk^2 моментъ инерціи тѣла относительно оси, то его живая сила будетъ $Mk^2\omega^2$ (п. 213). Обозначивъ черезъ X, Y, Z проекціи какой-либо изъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, и черезъ x, y, z координаты ея точки приложенія, имѣемъ, слѣдовательно,

$$d\left(\frac{1}{2}Mk^2\omega^2\right) = \sum (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Съ другой стороны, обозначивъ черезъ r разстояніе матеріальной частицы x, y, z отъ оси и замѣтивъ, что ея полярный уголъ выражается суммой $\theta + \alpha$, гдѣ α есть постоянная, мы найдемъ, что

$$x = r \cos (\theta + \alpha), \quad y = r \sin (\theta + \alpha), \quad z = \text{const.},$$

$$dx = -r \sin (\theta + \alpha) d\theta = -\omega y dt,$$

$$dy = r \cos (\theta + \alpha) d\theta = \omega x dt,$$

$$dz = 0,$$

и уравненіе движенія напишется такъ:

$$d\left(\frac{1}{2}Mk^2\omega^2\right) = \omega dt \sum (xY - yX). \quad (1)$$

Выполнивъ дифференцированіе, мы можемъ написать это уравненіе также и въ слѣдующемъ видѣ:

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum (xY - yX). \quad (1')$$

Замѣчаніе I. — Мы нашли, что элементарная работа силы X, Y, Z равна $(xY - yX) d\theta$; она равна, слѣдовательно, произведенію элементарнаго угла $d\theta$, на который повернулось тѣло, и момента силы около оси вращенія.

Замѣчаніе II. — Мы могли бы получить уравненіе движенія вида (1'), примѣняя теорему моментовъ количествъ движенія около оси Oz . Дѣйствительно, сумма моментовъ количествъ движенія около оси Oz равна (п. 213) $Mk^2\omega$, и уравненіе (1') выражаетъ, что производная этой суммы по времени t равна суммѣ моментовъ $N = \sum (xY - yX)$ внѣшнихъ силъ около той же оси, потому что моменты реакцій, пересѣкающихся съ осью, равны нулю.

Случай, когда движеніе равномѣрно. — Если сумма моментовъ непосредственно приложенныхъ силъ около оси враще-

нія, равна нулю въ каждый моментъ, то уравненіе движенія (1) даетъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \omega = \text{const.};$$

движеніе будетъ равномернымъ.

Реакціи оси. — Какъ мы уже объяснили въ статикѣ (п. 113) реакціи оси можно свести къ двумъ силамъ Q' и Q'' , приложеннымъ къ двумъ точкамъ O и O' оси. Дѣйствительно, для того, чтобы сдѣлать ось неподвижной, достаточно закрѣпить лишь двѣ ея точки O и O' ; реакции ~~точки~~ свелись бы тогда къ реакціямъ Q' и Q'' этихъ двухъ точекъ. Мы обозначимъ черезъ h координату точки O' , принимая за начало точку O (фиг. 145).

Нужно вычислить проекціи X' , Y' , Z' и X'' , Y'' , Z'' реакцій Q' и Q'' . Съ этой цѣлью мы можемъ написать семь всеобщихъ уравненій движенія. Но два изъ нихъ, уравненіе моментовъ около оси Oz и уравненіе живыхъ силъ, приводятъ къ соотношенію (1) или (1'), которое не зависитъ отъ реакцій. Чтобы написать пять другихъ уравненій, сдѣлаемъ приведеніе силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$, приложенныхъ къ точкѣ O ; мы получимъ главный векторъ OR , имѣющій проекціи

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = \Sigma Z_k,$$

и пару, ось которой OG имѣетъ проекціи:

$$L = \Sigma (y_k Z_k - z_k Y_k), \quad M = \Sigma M_k, \quad N = \Sigma N_k,$$

гдѣ суммы Σ распространены на всѣ силы $F_1, F_2, \dots, F_n$. Другія пять всеобщихъ уравненій движенія будутъ тогда:

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = X' + X'' + X,$$

$$\Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y' + Y'' + Y,$$

$$\Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z' + Z'' + Z,$$

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = -h Y'' + L,$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = h X'' + M.$$

Но

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\omega y, & \frac{dy}{dt} &= \omega x, & \frac{dz}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 x - \frac{d\omega}{dt} y, & \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega^2 y + \frac{d\omega}{dt} x, & \frac{d^2z}{dt^2} &= 0.\end{aligned}$$

Предыдущія уравненія теперь напишутся такъ:

$$\left. \begin{aligned}-\omega^2 \sum mx - \frac{d\omega}{dt} \sum my &= X + X' + X'', \\ -\omega^2 \sum my + \frac{d\omega}{dt} \sum mx &= Y + Y' + Y'', \\ 0 &= Z + Z' + Z'', \\ \omega^2 \sum myz - \frac{d\omega}{dt} \sum mxz &= L - hY'', \\ -\omega^2 \sum mxz - \frac{d\omega}{dt} \sum myz &= M + hX''.\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Количества X , Y , Z , L , M извѣстны для каждаго момента, потому что они относятся къ даннымъ силамъ, приложеннымъ къ тѣлу. Суммы, входящія въ лѣвыя части, представляютъ собою функции времени, которыя будутъ извѣстны, когда уголь θ будетъ опредѣленъ изъ уравненія (1). Напримѣръ,

$$\sum mx = M\xi,$$

гдѣ ξ есть абсцисса центра тяжести; кромѣ того, если черезъ q , θ мы обозначимъ полуполярныя координаты этой точки, то

$$\xi = q \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

и сумма $\sum mx$ будетъ извѣстна, когда уголь θ опредѣленъ. Чтобы вычислить суммы $\sum myz$, $\sum mxz$, вообразимъ систему осей $Ox'y'z'$, которыя связаны съ твердымъ тѣломъ и принимаютъ участіе въ его движеніи, при чемъ уголь между осями Ox' и Ox равенъ θ (фиг. 145); формулы преобразованія дадутъ:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta, \\ z &= z'.$$

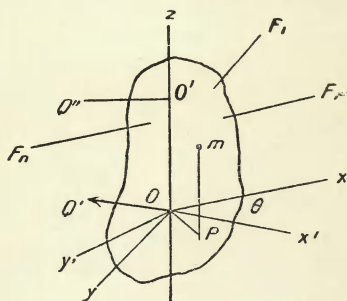
Отсюда мы выводимъ уравненія

$$\begin{aligned}\sum myz &= \sin \theta \sum mx'z' + \cos \theta \sum my'z', \\ \sum mxz &= \cos \theta \sum mx'z' - \sin \theta \sum my'z',\end{aligned}$$

въ которыя входятъ лишь суммы $\Sigma mx'z'$, $\Sigma my'z'$, постоянныя относительно твердаго тѣла.

Теперь можно опредѣлить проекціи X' , Y' , X'' , Y'' изъ уравненій (2), и у насъ останется одно уравненіе, а именно — третье, для опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ Z' и Z'' . Мы встрѣчаемъ здѣсь ту же неопредѣленность, что и въ статикѣ (п. 113).

Упрощеніе въ случаѣ, когда ось вращенія есть одна изъ главныхъ осей инерціи для центра тяжести. — На прак-



Фиг. 145.

тикѣ, когда нужно, чтобы твердое тѣло быстро вращалось, очень часто стараются сдѣлать такъ, чтобы оно вращалось вокругъ одной изъ главныхъ осей инерціи относительно центра тяжести. Это объясняется тѣмъ, что въ выраженія, полученныя изъ уравненій (2) для проекцій реакцій X' , Y' , X'' , Y'' , входятъ, вообще, члены, которые содержатъ ω^2 и дѣлаются очень большими, когда угловая скорость ω становится значительной. Вслѣдствіе этого на ось давятъ силы, которыя стремятся разорвать ее, и въ результатѣ можетъ произойти поломка оси. Но эти члены, содержащіе ω^2 , исчезаютъ, когда ось вращенія есть одна изъ главныхъ осей инерціи относительно центра тяжести. Тогда

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mxz = \Sigma myz = 0,$$

и уравненія (2) въ этомъ случаѣ выразятся такъ:

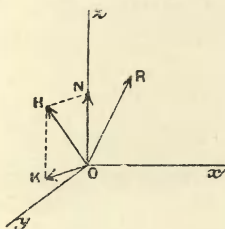
$$\left. \begin{aligned} X + X' + X'' &= 0, & Y + Y' + Y'' &= 0, & Z + Z' + Z'' &= 0, \\ L - hY'' &= 0, & M + hX'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эти уравненія имѣютъ такой же видъ, какъ и пять первыхъ уравненій, которыя мы получили въ статикѣ (п. 113) для опредѣ-

ленія реакцій оси въ случаѣ равновѣсія. Теперь, въ отличіе отъ случая равновѣсія, моментъ N не равенъ нулю.

Этотъ результатъ вычисленія можно истолковать геометрически.

Система непосредственно приложенныхъ силъ эквивалентна системѣ, состоящей изъ силы $OR(X, Y, Z)$ и пары, имѣющей ось $OH(L, M, N)$ (фиг. 146). Разложимъ эту пару на двѣ другія такъ, чтобы ось OK одной лежала въ плоскости xOy и имѣла со-



Фиг. 146.

ставляющія, равныя $L, M, 0$, и чтобы ось ON другой была направлена по оси Oz . Если бы мы отбросили пару ON , то тѣло, которое предполагается неподвижнымъ подъ дѣйствіемъ силы OR и пары OK ³), оставалось бы въ равновѣсіи, и въ этомъ состояніи равновѣсія реакціи были бы опредѣлены уравненіями (3), въ которыя не входитъ пара ON . Если мы затѣмъ приведемъ тѣло въ движеніе, сообщивъ ему нѣкоторую начальную скорость, и заставимъ дѣйствовать пару ON , то тѣло будетъ двигаться, и реакціи оси остаются такими же, какими онѣ были бы въ случаѣ равновѣсія.

224. Перманентныя и спонтанныя оси вращенія. — I. Вернемся къ случаю, когда ось вращенія произвольна, и предположимъ сначала, что непосредственно приложенныя силы постоянно составляютъ систему, эквивалентную одной силѣ, проходящей черезъ точку O . Тогда

$$L = M = N = 0.$$

Уравненіе движенія (1) даетъ

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \omega = \text{const.}$$

и уравненія (3) преобразуются въ

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 \Sigma m x &= X + X' + X'', \\ -\omega^2 \Sigma m y &= Y + Y' + Y'', \\ 0 &= Z + Z' + Z'', \\ \omega^2 \Sigma m y z &= -h Y'', \\ -\omega^2 \Sigma m x z &= h X''. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Разсмотримъ, не можетъ ли реакція точки O' быть равной нулю. Для этого необходимо, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$X'' = Y'' = Z'' = 0,$$

т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\Sigma m y z = \Sigma m x z = 0,$$

или, наконецъ, чтобы ось вращенія была главной осью инерціи для точки O .

Если это условіе осуществлено, то реакція точки O' равна нулю, такъ что эта точка не оказываетъ на твердое тѣло никакого дѣйствія, и мы можемъ разсматривать твердое тѣло, какъ свободное въ точкѣ O' , при чемъ въ его движеніи ничего не измѣняется. Отсюда вытекаетъ теорема:

ТЕОРЕМА.—Если твердое тѣло, которое можетъ двигаться вокругъ неподвижной точки, находится подъ дѣйствіемъ непосредственно приложенныхъ силъ, которыя даютъ равнодѣйствующую, проходящую черезъ эту точку, и если это тѣло начинаетъ вращаться вокругъ одной изъ главныхъ осей инерціи для данной неподвижной точки, то оно будетъ продолжать безпредѣльно вращаться вокругъ этой оси съ постоянной угловой скоростью.

Въ силу этого свойства главные оси инерціи для точки O иногда называются перманентными осями вращенія вокругъ этой точки.

II. Предположимъ теперь, что непосредственно приложенныхъ силъ нѣтъ. Въ уравненіяхъ (4) мы должны тогда положить

$$X = Y = Z = 0.$$

Можетъ ли быть, чтобы реакція точки O обращалась въ нуль одновременно съ реакціей точки O' ? Для этого необходимо присоединить къ предыдущимъ условіямъ уравненія

$$\Sigma m x = \Sigma m y = 0.$$

Ось вращенія будетъ тогда одной изъ главныхъ осей центрального эллипсоида инерціи (п. 197). Отсюда вытекаетъ теорема:

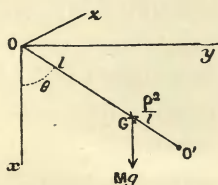
Теорема. — Если совершенно твердое тѣло, на которое не дѣйствуютъ непосредственно приложенныя силы, начинаетъ вращаться вокругъ одной изъ главныхъ осей центрального эллипсоида инерціи, то оно продолжаетъ равномерно вращаться вокругъ этой оси.

Благодаря этому свойству оси центрального эллипсоида получили названіе спонтанныхъ осей вращенія *).

Spontané — самопроизвольн.

225. Физическій маятникъ. — Физическимъ или сложнымъ маятникомъ называется тяжелое твердое тѣло, которое можетъ свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси.

Ось вращенія, которая здѣсь называется осью привѣса, мы примемъ за ось z -овъ, а плоскостью xOy намъ будетъ служить вертикальная плоскость, содержащая траекторію центра тяжести G (фиг. 147), при чемъ ось x -овъ направлена вертикально внизъ. Пусть



Фиг. 147.

θ будетъ уголъ, который прямая OG составляетъ въ моментъ t съ вертикалью; этотъ уголъ считается положительнымъ въ направленіи движенія противъ часовой стрѣлки вокругъ оси Oz . Угловая скорость будетъ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

и уравненіе движенія:

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma (xY - yX).$$

Правая часть, т. е. сумма моментовъ вѣсовъ около оси Oz , есть моментъ полного вѣса тѣла, приложеннаго къ центру тяжести G ,

*) Обобщеніе этой теоремы см. въ сочиненіи Аппелля „Traité de Mécanique“, т. II, 2-е изд., стр. 82.

т. е. равенъ — $Mgl \sin \theta$, гдѣ l обозначаетъ длину OG . Слѣдовательно,

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = -Mgl \sin \theta,$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gl}{k^2} \sin \theta.$$

Сравнимъ это уравненіе съ тѣмъ, которое получается для движенія математическаго маятника длины l' , т. е. съ уравненіемъ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l'} \sin \theta.$$

Мы видимъ, что сложный маятникъ совершаетъ такое же движеніе, какое имѣлъ бы простой маятникъ длины

$$l' = \frac{k^2}{l}.$$

Этотъ простой маятникъ называется синхронистическимъ со сложнымъ маятникомъ.

Если на прямой OG мы отложимъ длину $OO' = l'$, то точка O' твердаго тѣла будетъ качаться такъ, какъ если бы съ точкой O ее связывала лишь нить, не имѣющая массы. Обозначимъ черезъ ϱ гираціонный радіусъ относительно оси, параллельной оси Oz и проходящей черезъ центръ тяжести G ; тогда

$$Mk^2 = M\varrho^2 + Ml'^2;$$

опредѣливъ изъ этого соотношенія значеніе k^2 и подставивъ его въ выраженіе для l' , мы находимъ:

$$l' = l + \frac{\varrho^2}{l}.$$

Отсюда вытекаетъ, что длина $OO' = l'$ всегда больше, чѣмъ длина $OG = l$, и что разстоянія OG , $O'G$, которыя равны соотвѣтственно l и $\frac{\varrho^2}{l}$, связаны соотношеніемъ

$$OG \times O'G = \varrho^2.$$

Ось, проведенную черезъ точку O' параллельно оси привѣса, Гюйгенсъ назвалъ осью качанія. Всѣ точки этой оси качаются такъ, какъ если бы съ осью привѣса ихъ связывали лишь нити, не имѣющія массы. Предыдущая формула показываетъ, что ось привѣса и ось качанія суть сопряженные прямые: если ось качаній мы

сдѣлаемъ осью привѣса, то прежняя ось привѣса станетъ новой осью качанія.

ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА. — Если въ плоскости, проходящей черезъ центръ тяжести, находятся съ одной и другой стороны отъ центра тяжести двѣ параллельныя оси, которыя неодинаково удалены отъ центра тяжести и которымъ соотвѣтствуетъ одна и та же длина синхронистическаго маятника, то эта длина равна разстоянію между двумя осями.

Дѣйствительно, если l и l_1 обозначаютъ разстоянія центра тяжести отъ этихъ двухъ осей, а l' есть общая длина синхронистическаго маятника, то

$$l' = l + \frac{\varrho^2}{l} \quad \text{и} \quad l' = l_1 + \frac{\varrho^2}{l_1},$$

откуда вытекаетъ соотношеніе

$$l + \frac{\varrho^2}{l} = l_1 + \frac{\varrho^2}{l_1};$$

отбросивъ рѣшеніе $l = l_1$ (оно не годится, такъ какъ разстояніе осей отъ точки G неодинаковы), находимъ

$$\frac{\varrho^2}{l} = l_1.$$

Слѣдовательно, разстояніе $l + l_1$ между двумя осями равно длинѣ $l + \frac{\varrho^2}{l}$ синхронистическаго маятника.

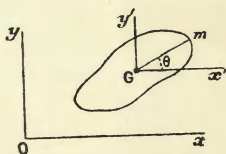
На этой теоремѣ основанъ обратимый маятникъ Катеръа, примѣняемый въ геодезіи. Этотъ маятникъ состоитъ изъ металлическаго стержня, который снабженъ двумя неподвижными параллельными ножами и заканчивается двумя неравными металлическими массами, расположенными такимъ образомъ, чтобы центръ тяжести находился въ плоскости двухъ ножей, на неодинаковомъ разстояніи отъ нихъ. Если перемѣстить массы такимъ образомъ, чтобы продолжительность T одного простаго качанія вокругъ того и другого ножа была одинаковой, то между этой продолжительностью и разстояніемъ l ножей имѣтъ мѣсто соотношеніе

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

посредствомъ котораго можно вычислить напряженіе g силы тяжести.

II. — ДВИЖЕНІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА ПАРАЛЛЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТИ.

226. Уравненія движенія. — Когда твердое тѣло вращается вокругъ неподвижной оси, каждая точка твердаго тѣла движется въ неподвижной плоскости, перпендикулярной къ оси, такъ что тѣло перемѣщается параллельно неподвижной плоскости. Сдѣлаемъ болѣе общее предположеніе, что твердое тѣло должно перемѣщаться параллельно плоскости. Напримѣръ, представимъ себѣ цилиндръ, который опирается своимъ основаніемъ на неподвижную ^{и плоскость} плоскость; каждая точка тѣла въ такомъ случаѣ описываетъ траекторію, лежащую въ неподвижной плоскости, которая параллельна данной. Въ частности, если мы черезъ начальное положеніе центра тяжести проведемъ плоскость xOy , параллельную неподвижной плоскости, то центръ тяжести будетъ оставаться въ этой плоскости; то же самое относится ко всѣмъ точкамъ тѣла, которыя въ начальный моментъ лежатъ въ этой плоскости.



Фиг. 148.

Пусть S будетъ сѣченіе тѣла плоскостью xOy . Чтобы опредѣлить положеніе тѣла, достаточно знать положеніе этого сѣченія. Оно опредѣляется координатами ξ, η центра тяжести G (фиг. 148) относительно неподвижныхъ осей Ox и Oy и угломъ θ между осью Ox и прямой Gm , неизмѣнно связанной съ тѣломъ. Положеніе системы зависитъ, слѣдовательно, отъ трехъ переменныхъ параметровъ ξ, η, θ ; чтобы опредѣлить ея движеніе, достаточно имѣть три уравненія.

Прежде всего теорема о движеніи центра тяжести даетъ два уравненія

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y, \quad (1)$$

гдѣ суммы $\sum$ распространяются на всѣ внѣшнія силы.

Черезъ центръ тяжести G проведемъ оси Gx' и Gy' , параллельныя неподвижнымъ осямъ, и обозначимъ черезъ x' , y' координаты точки тѣла относительно этихъ осей и черезъ Mk^2 моментъ инерціи тѣла вокругъ оси Gz' , перпендикулярной къ плоскости $x'y'$. Этотъ моментъ инерціи остается постояннымъ въ теченіе движенія. Движеніе тѣла относительно осей $Gx'y'z'$ есть вращеніе вокругъ оси Gz' съ угловой скоростью $\frac{d\theta}{dt}$. Такъ какъ къ движенію вокругъ оси Oz примѣнима теорема о моментахъ количествъ движенія, то мы имѣемъ уравненіе

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum (x'Y - y'X); \quad (2)$$

оно можетъ быть получено такъ же, какъ въ п. 223, если примѣнимъ теорему живыхъ силъ къ относительному движенію вокругъ центра тяжести.

Мы имѣемъ, такимъ образомъ, три уравненія, опредѣляющія координаты ξ , η , θ въ функціи отъ t .

Сочетанія изъ этихъ уравненій могутъ замѣнить то или другое изъ нихъ; упомянемъ о двухъ такихъ сочетаніяхъ:

1° Уравненіе, которое можно получить, пользуясь теоремой о моментахъ количествъ движенія относительно неподвижной оси Oz , перпендикулярной къ плоскости xOy . Извѣстно (п. 216), что сумма моментовъ количествъ движенія около оси Oz равна моменту количества движенія центра тяжести (въ предположеніи, что въ центрѣ тяжести сосредоточена вся масса), сложенному съ суммой $Mk^2 \frac{d\theta}{dt}$ моментовъ количествъ движенія около оси Gz' , при чемъ послѣдняя сумма вычисляется для относительнаго движенія вокругъ центра тяжести G . Мы имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$\frac{d}{dt} \left[M \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + Mk^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \sum (xY - yX). \quad (3)$$

2° Другое уравненіе мы можемъ получить, примѣнивъ теорему живыхъ силъ къ абсолютному движенію. По теоремѣ Кёнига (п. 217) живая сила системы равна

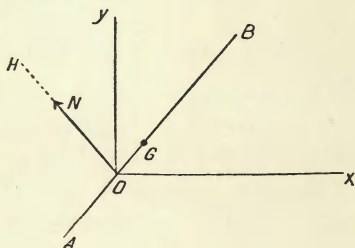
$$M \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] + Mk^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2;$$

мы имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$d \frac{M}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + k^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \sum (Xdx + Ydy). \quad (4)$$

Если обозначимъ черезъ I моментъ инерціи тѣла вокругъ оси, перпендикулярной къ плоскости xOy и проходящей въ моментъ t черезъ мгновенный центръ вращенія плоской фигуры S , то мы можемъ принять для величины живой силы выраженіе $I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, потому что скорости таковы же, какъ если бы тѣло вращалось вокругъ этой мгновенной оси. Но при перемѣщеніи мгновенной оси въ тѣлѣ моментъ инерціи I измѣняется вмѣстѣ съ временемъ t .

Замѣчаніе. — Силы связи, заставляющія тѣло перемѣщаться параллельно неподвижной плоскости xOy , не входятъ въ предыдущія уравненія, такъ какъ эти силы перпендикулярны къ плоскости xOy , если ограничиться случаемъ, когда тренія нѣтъ. Но возможны связи,



Фиг. 149.

отличныя отъ предыдущихъ; можетъ случиться, что силы, обусловленныя этими новыми связями, будутъ входить въ правыя части предыдущихъ уравненій, и ихъ необходимо будетъ исключить. Однако, если связи не зависятъ отъ времени и не вызываютъ тренія, то силы связи не входятъ въ уравненія живыхъ силъ, какъ мы увидимъ въ аналитической механикѣ.

Если имѣется нѣсколько твердыхъ тѣлъ, движущихся параллельно неподвижной плоскости, то мы можемъ, введя надлежащія силы связи, примѣнить къ каждому изъ тѣлъ предыдущія уравненія и затѣмъ исключить взаимныя реакціи тѣлъ или же можно примѣнить общія теоремы къ совокупности тѣлъ.

Первый примѣръ. — Въ неподвижной горизонтальной плоскости xOy движется безъ тренія тяжелый однородный безконечно тонкій прямолинейный стержень AB , который долженъ скользить безъ тренія по неподвижной точкѣ O плоскости. Изучить движеніе этого стержня (фиг. 149).

Пусть $2l$ будетъ длина стержня, M — его масса, r — радіусъ-векторъ середины G стержня и θ — уголъ между прямой OB и постояннымъ направлѣніемъ Ox . Моментъ инерціи стержня относительно точки G равенъ Mk^2 , гдѣ $k^2 = \frac{l^2}{3}$. Къ стержню приложены слѣдующія внѣшнія силы: 1° его вѣсъ (вертикальная сила); 2° нормальныя реакціи плоскости xOy (вертикальныя силы); 3° реакція N точки O на стержень, — сила, нормальная къ стержню и лежащая въ плоскости xOy .

Положеніе стержня зависитъ отъ двухъ параметровъ r и θ ; чтобы опредѣлить эти параметры въ функціи отъ t , нужно имѣть два уравненія, которыя не зависѣли бы отъ реакцій.

Мы получимъ эти уравненія, примѣняя теорему о моментахъ около вертикальной оси Oz и теорему живыхъ силъ. Такъ какъ моменты внѣшнихъ силъ около оси Oz равны нулю, то сумма моментовъ количествъ движенія около оси Oz есть величина постоянная. Эта сумма состоитъ изъ двухъ слагаемыхъ: момента количества движенія $Mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ массы всей системы, перенесенной въ центръ тяжести G , и суммы моментовъ количествъ движенія около оси Gz' , параллельной Oz , равной $Mk^2 \frac{d\theta}{dt}$ (моменту инерціи относительно точки G , умноженному на угловую скорость); написавъ, что сумма моментовъ количествъ движенія есть величина постоянная, имѣемъ уравненіе

$$(r^2 + k^2) \frac{d\theta}{dt} = C, \quad (1)$$

которое выражаетъ теорему площадей.

Работа внутреннихъ силъ равна нулю, потому что рѣчь идетъ о твердомъ тѣлѣ; работа внѣшнихъ силъ равна нулю, потому что каждая точка перемѣщается нормально къ дѣйствующимъ на нее внѣшнимъ силамъ; въ частности точка стержня, находящаяся въ началѣ O , имѣетъ скорость, направленную вдоль стержня AB , т. е. нормально къ реакціи N . Дифференціалъ всей живой силы равенъ поэтому нулю, и живая сила есть величина постоянная. Но эта живая сила состоитъ изъ живой силы всей массы, перенесенной въ центръ тяжести G ,

$$M \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} \right),$$

и живой силы вращательнаго движенія вокругъ центра тяжести G , равной $Mk^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}$. Мы имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе

$$\frac{dr^2}{dt^2} + (r^2 + k^2) \frac{d\theta^2}{dt^2} = h, \quad (2)$$

гдѣ h есть положительная постоянная. Интегрированіе этихъ уравненій приводится къ квадратурамъ. Подставивъ въ уравненіе (2) значеніе $\frac{d\theta}{dt}$ изъ

*) Подъ r подразумѣвается величина (r, k, θ) .

уравнения (1) и положивъ $C^2 = a^2 h$, мы находимъ

$$(r^2 + k^2) \frac{dr^2}{dt^2} = h (r^2 + k^2 - a^2). \quad (3)$$

Переменные отдѣляются:

$$dt = \pm \sqrt{\frac{r^2 + k^2}{h (r^2 + k^2 - a^2)}} dr, \quad (4)$$

и мы найдемъ посредствомъ квадратуры время t въ функціи отъ r . Замѣнивъ теперь dt этимъ выраженіемъ въ уравненіи (1), мы получаемъ:

$$d\theta = \frac{\pm C dr}{\sqrt{h (r^2 + k^2) (r^2 + k^2 - a^2)}}; \quad (5)$$

знаки здѣсь соотвѣтственно тѣ же, что и въ уравненіи (4).

Изслѣдованіе. — Изъ уравненія (1) мы видимъ, что производная $\frac{d\theta}{dt}$ имѣетъ постоянный знакъ; слѣдовательно, стержень вращается все время въ ту же сторону, въ которую онъ вращался вначалѣ; абсолютная величина его угловой скорости возрастаетъ съ уменьшеніемъ радіуса-вектора r и убываетъ съ его возрастаніемъ. Относительно измѣненія r слѣдуетъ различать нѣсколько случаевъ.

1° Предположимъ, что въ начальный моментъ стержень вращается такимъ образомъ, что $\frac{dr}{dt} > 0$ и вначалѣ $r > 0$. Въ такомъ случаѣ передъ радикаломъ нужно взять знакъ $+$; r возрастаетъ, производная $\frac{dr}{dt}$ увеличивается и остается, очевидно, постоянной; слѣдовательно, r продолжаетъ возрастать до момента, когда $r = l$; тогда стержень оставляетъ точку O , и передъ нами возникаетъ другая задача, впрочемъ, очень легкая.

2° Если въ начальный моментъ $\frac{dr}{dt} < 0$ и $r > 0$, то r убываетъ, и мы должны взять знакъ $-$. Чтобы узнать, можетъ ли r обратиться въ нуль, нужно изучить знакъ выраженія $k^2 - a^2$.

а. Если $k^2 - a^2 > 0$, то r обращается въ нуль и затѣмъ получаетъ отрицательное значеніе; производная $\frac{dr}{dt}$ остается отрицательной, r убываетъ до значенія $-l$, и стержень оставляетъ точку O .

б. Если $k^2 - a^2 < 0$, то r убываетъ до значенія $\sqrt{a^2 - k^2}$, достигаемаго по истеченіи конечнаго промежутка времени. Начиная съ этого момента, r снова возрастаетъ, такъ что мы должны взять передъ радикаломъ знакъ $+$, и, наконецъ, r получаетъ значеніе l .

в. Если $a^2 = k^2$, то r убываетъ до значенія 0, которое можетъ быть достигнуто лишь черезъ безконечно большой промежутокъ времени, ибо t обращается въ безконечность, когда r стремится къ 0. Въ этомъ случаѣ траекторія точки G , вообще опредѣляемая уравненіемъ (5), есть спираль,

приближающаяся асимптотически къ полюсу. Дѣйствительно, предположимъ, что $a^2 = k^2$, или $C^2 = k^2 h$; уравненіе (5), въ которомъ мы беремъ знакъ — при $C > 0$ обращается въ

$$d\theta = \frac{-k dr}{r \sqrt{r^2 + k^2}} = \frac{d \frac{k}{r}}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Интегрируя и обозначая через α произвольную постоянную, мы получимъ уравненіе траекторіи

$$\theta - \alpha = \text{Log} \left(\frac{k}{r} + \sqrt{1 + \frac{k^2}{r^2}} \right);$$

рѣшивъ его относительно $\frac{k}{r}$, находимъ:

$$\frac{k}{r} = \frac{1}{2} (e^{\theta - \alpha} - e^{-\theta + \alpha}).$$

Вычисленіе реакціи N . — Мы будемъ считать реакцію N положительной въ направленіи полупрямой OH , которая составляетъ съ осью Ox уголъ $\theta + \frac{\pi}{2}$ (фиг. 149). Написавъ уравненія движенія центра тяжести G и пользуясь удареніями для обозначенія производныхъ по времени, имѣемъ:

$$M\xi'' = -N \sin \theta, \quad M\eta'' = N \cos \theta.$$

Умноживъ эти уравненія соответственно на $-\sin \theta$ и $\cos \theta$ и затѣмъ сложивъ, получимъ

$$N = M (-\xi'' \sin \theta + \eta'' \cos \theta).$$

Формулы

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta$$

даютъ:

$$\xi'' = (r'' - r\theta'^2) \cos \theta - (2r'\theta' + r\theta'') \sin \theta,$$

$$\eta'' = (r'' - r\theta'^2) \sin \theta + (2r'\theta' + r\theta'') \cos \theta,$$

поэтому

$$N = M (2r'\theta' + r\theta'') = \frac{M}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \theta').$$

Подставивъ вмѣсто производной θ' ея значеніе изъ уравненія (1), находимъ:

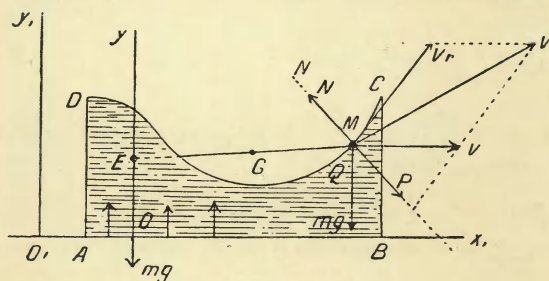
$$N = \frac{M}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{Cr'}{r^2 + k^2} \right) = \frac{2MCK^2 r'}{(r^2 + k^2)^2}.$$

Замѣщая производную r' ея значеніемъ изъ уравненія (4), имѣемъ, наконецъ:

$$N = \pm \frac{2Mc k^2 \sqrt{h(r^2 + k^2 - a^2)}}{(r^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

гдѣ нужно взять знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, возрастаетъ ли r или убываетъ. Такимъ образомъ мы выразили реакцію функцией, зависящей исключительно отъ положенія стержня.

Второй примѣръ. — Въ неподвижной вертикальной плоскости движется безъ тренія матеріальная пластинка $ABCD$, ограниченная снизу и съ боковъ прямолинейными отрѣзками AB , AD и BC , а сверху криволинейной дугой DMC данной формы (фиг. 150). Пластинка должна скользить безъ тренія по горизонтальной оси O_1x_1 , на которой она лежитъ стороною AB ;



Фиг. 150.

тяжелая матеріальная точка M , масса которой m равна массѣ пластинки, должна скользить безъ тренія по кривой DMC . Найти движеніе системы, предполагая, что она предоставлена самой себѣ безъ начальныхъ скоростей въ нѣкоторомъ данномъ положеніи.

Пусть E будетъ центръ тяжести пластинки, O —его проекція на ось O_1x_1 , q —его абсцисса O_1O , x_1 и y_1 координаты точки M относительно неподвижныхъ осей $x_1O_1y_1$. Вообразимъ вертикальную ось Oy , связанную съ пластинкой, и назовемъ черезъ x и y координаты точки M относительно осей Ox_1 и Oy , такъ что

$$x_1 = q + x, \quad y_1 = y;$$

эти координаты x и y связаны извѣстнымъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$ кривой DMC . Положеніе системы зависитъ отъ двухъ параметровъ: параметра q , фиксирующаго положеніе пластинки, и второго параметра, определяющаго положеніе точки M на кривой DMC . Поэтому достаточно найти два уравненія, которыя не зависѣли бы отъ реакцій.

Внѣшними силами системы являются нормальныя реакціи оси O_1x_1 на пластинку, вѣсъ mg пластинки и равный ему вѣсъ точки M , приложен-

ные соотвѣтственно въ точкахъ E и M . Такъ какъ эти силы направлены вертикально, то, обозначая черезъ ξ абсциссу центра тяжести G системы, лежащаго на серединѣ прямой EM , и написавъ уравненія проекціи движенія центра тяжести на ось O_1x_1 , имѣемъ

$$\xi'' = 0, \quad \xi' = a, \quad \xi = at + \xi_0.$$

Такъ какъ система вначалѣ находится въ покоѣ, то въ начальный моментъ $\xi' = 0$, постоянная $a = 0$ и $\xi = \xi_0$. Горизонтальная проекція центра тяжести, слѣдовательно, неподвижна. Подставивъ вмѣсто ξ его значеніе $\frac{1}{2}(q + x_1)$ и замѣняя x_1 на $q + x$, находимъ:

$$q + \frac{x}{2} = \xi_0 \quad (1)$$

Теперь примѣнимъ теорему живыхъ силъ. Живая сила пластинки равна mq'^2 ; живая сила точки M равна

$$m(x_1'^2 + y_1'^2) = m[(q' + x')^2 + y'^2].$$

Слѣдовательно, живая сила $2T$ всей системы есть

$$2T = m(2q'^2 + 2q'x' + x'^2 + y'^2).$$

Вычислимъ элементарныя работы внѣшнихъ и внутреннихъ силъ; нормальная реакція оси O_1x_1 и вѣсъ пластинки дають элементарныя работы, равныя нулю; элементарная работа вѣса mg точки M равна $-mgdy$. Работы внутреннихъ силъ пластинки, какъ твердаго тѣла, равны нулю. Остается вычислить сумму элементарныхъ работъ нормального давленія P точки M на пластинку и реакціи N пластинки на точку. Эта реакція равна и противоположна давленію P . Покажемъ, что сумма элементарныхъ работъ двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ P и N равна нулю. Сила P приложена въ точкѣ Q пластинки, къ которой прилегаетъ точка M , и скорость точки Q есть векторъ V , параллельный оси O_1x_1 ; если обозначить черезъ V_P проекцію вектора V на силу P , то элементарная работа силы P равна PV_Pdt . Движеніе точки M относительно пластинки происходитъ по кривой DMC , и ея относительная скорость V_r направлена по касательной къ кривой, т. е. перпендикулярно къ реакціи N . Абсолютная скорость V' точки M есть равнодѣйствующая ея относительной скорости V_r и переносной скорости V . Въ такомъ случаѣ работа реакціи N равна NV'_Ndt , гдѣ V'_N есть проекція абсолютной скорости V' на реакцію N . Но проекція V'_N равна суммѣ проекцій ея двухъ составляющихъ V_r и V на реакцію N . Такъ какъ проекція составляющей V_r равна нулю, то

$$V'_N = V_N,$$

и работа реакціи N равна NV_Ndt . Слѣдовательно, сумма работъ силъ P и N равна

$$(PV_P + NV_N) dt.$$

Но $P=N$ и $V_P=-V_N$, потому что V_P и V_N суть проекции вектора V на двѣ оси P и N , направленные въ противоположныя стороны, слѣдовательно, сумма элементарныхъ работъ силъ P и N равна нулю.

Поэтому дифференціальное уравненіе живыхъ силъ будетъ

$$dm \left(q'^2 + q'x' + \frac{x'^2 + y'^2}{2} \right) = -mg dy,$$

откуда, интегрируя и замѣчая, что въ начальный моментъ $y=y_0$ и $q'=x'=0$, находимъ:

$$q'^2 + q'x' + \frac{x'^2 + y'^2}{2} = g(y_0 - y). \quad (2)$$

Уравненія (1) и (2) вмѣстѣ съ уравненіемъ кривой DMC

$$f(x, y) = 0 \quad (3)$$

опредѣляютъ координаты q, x, y въ функціи отъ t . Изъ уравненія (1) мы находимъ

$$q' = -\frac{x'}{2}; \quad (4)$$

подставивъ это значеніе q' въ уравненіе (2), получимъ

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 2g(y - y_0); \quad (5)$$

уравненія (3) и (5) опредѣляютъ движеніе точки относительно пластинки. Если предположить, что DMC есть прямая, то интегрированіе не представитъ никакихъ затрудненій.

Нашу задачу въ ее общемъ видѣ можно свести къ изученію движенія тяжелой точки по неподвижной кривой. Дѣйствительно, сдѣлаемъ замѣну переменнй, полагая

$$x = X\sqrt{2}.$$

Имѣемъ тогда

$$f(X\sqrt{2}, y) = 0,$$

$$X'^2 + y'^2 = 2g(y_0 - y),$$

и эти два уравненія представляютъ собою какъ разъ уравненія движенія тяжелой точки, имѣющей координаты X и y , по кривой

$$f(X\sqrt{2}, y) = 0.$$

Замѣчаніе. — Можно было бы непосредственно изучить движеніе точки M относительно пластинки, примѣняя теорію относительнаго движенія. Такъ какъ пластинка имѣетъ поступательное движеніе, ускореніе котораго параллельно оси O_1x_1 и равно q'' , то можно было бы разсматривать пластинку, какъ неподвижную, если присоединить къ двумъ силамъ, приложеннымъ въ точкѣ M , центробѣжную силу, проекціи которой равны

$$X = -mq'', \quad Y = 0.$$

Если мы теперь примѣнимъ теорему живыхъ силъ къ движенію точки относительно пластинки, то увидимъ, что работа реакціи N при относительно перемѣщеніи равна нулю, и

$$d \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2) = -mg dy - mq'' dx.$$

Подставивъ вмѣсто производной q'' ея выраженіе, получаемое изъ уравненія (4), $q'' = -\frac{x''}{2}$, и проинтегрировавъ, получимъ уравненіе (5).

III. — ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА, КОТОРОЕ МОЖЕТЪ ВРАЩАТЬСЯ ВОКРУГЪ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ И ПЕРЕМѢЩАТЬСЯ ВДОЛЬ ЭТОЙ ОСИ.

227. Уравненія движенія. — Разсмотримъ твердое тѣло, которое, находясь подѣ дѣйствіемъ непосредственно приложенныхъ силъ, можетъ вращаться вокругъ неподвижной оси и одновременно съ этимъ перемѣщаться вдоль этой оси. Неподвижную ось мы примемъ за ось z -овъ, а оси Ox и Oy выберемъ произвольнымъ образомъ. Положеніе твердаго тѣла зависитъ отъ двухъ параметровъ: отъ угла θ , на который оно повернулось отъ своего начального положенія, иначе говоря, отъ угла, который составляетъ со своимъ начальнымъ положеніемъ нѣкоторая плоскость, связанная съ твердымъ тѣломъ и проходящая черезъ ось, и отъ координаты ζ центра тяжести. Связь, которой подчинено тѣло, мы можемъ представить себѣ, предположивъ, что въ тѣлѣ выдолбленъ каналъ, имѣющій форму цилиндра вращенія, и что оно насажено на неподвижный цилиндръ вращенія вокругъ оси Oz , имѣющій радіусъ, равный радіусу канала. Силы связи суть реакціи неподвижнаго цилиндра на тѣло; если тренія нѣтъ, то эти реакціи нормальны къ неподвижному цилиндру; онѣ пересѣкаютъ ось Oz подѣ прямыми углами.

Чтобы опредѣлить движеніе, достаточно имѣть два уравненія, которыя не зависѣли бы отъ реакцій; эти уравненія даются намъ теоремой о моментахъ количествъ движенія около неподвижной оси и теоремой о проекціяхъ количествъ движенія на неподвижную ось. Эти два уравненія суть:

$$M k^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum (x Y - y X), \quad (1)$$

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum Z; \quad (2)$$

суммы въ правыхъ частяхъ распространены на приложенныя силы.

Одно изъ этихъ двухъ уравненій можно замѣнить уравненіемъ живыхъ силъ, которое мы легко можемъ написать, замѣчая, что живая сила равна

$$Mk^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + M \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2.$$

Вычисленіе реакцій оси. — Система реакцій оси эквивалентна системѣ силъ, которая получается путемъ приведенія реакцій въ началѣ координатъ O , т. е. эквивалентна силѣ (X_1, Y_1) , приложенной въ точкѣ O и лежащей въ плоскости xOy , и парѣ (L_1, M_1) , ось которой также лежитъ въ плоскости xOy . Теоремы о проекціяхъ количествъ движенія и о моментахъ количествъ движенія въ примѣненіи къ осямъ Ox и Oy даютъ слѣдующія четыре уравненія, которыми опредѣляются реакціи:

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X + X_1,$$

$$\sum m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y + Y_1,$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum (yZ - zY) + L_1,$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = \sum (zX - xZ) + M_1.$$

IV. — ОБЩІЯ ПРЕДЛОЖЕНІЯ О ДВИЖЕНІИ ТВЕРДАГО ТѢЛА ВОКРУГЪ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

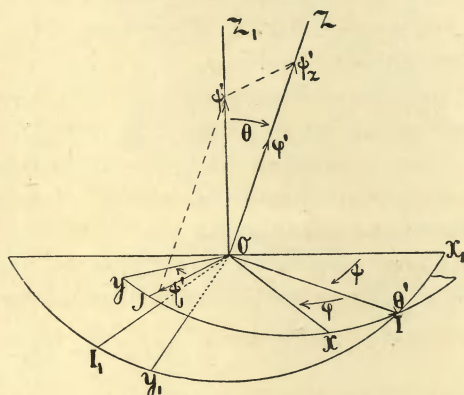
228. Предварительныя геометрическія и кинематическія свѣдѣнія. — Чтобы опредѣлить положеніе твердаго тѣла, которое можетъ двигаться вокругъ неподвижной точки O , достаточно опредѣлить положеніе ортогональнаго трехграннаго угла, связаннаго съ тѣломъ, относительно неподвижнаго трехграннаго угла $Ox_1y_1z_1$. Какъ мы уже знаемъ изъ кинематики (п. 51), положеніе подвижнаго трехграннаго угла $Oxyz$ можно опредѣлить девятью косинусами угловъ, составляемыхъ осями, образующими этотъ трехгранный уголь, съ неподвижными осями. Эти девять косинусовъ связаны шестью различными соотношеніями, такъ что всѣ эти косинусы могутъ быть выражены при помощи трехъ независимыхъ переменныхъ.

Когда тѣло движется, девять косинусовъ измѣняются, какъ функціи отъ времени t ; въ каждый моментъ скорости различныхъ точекъ тѣла таковы, какъ если бы оно совершало мгновенное вращательное движеніе $O\omega$, котораго составляющія p, q, r по подвижнымъ осямъ мы опредѣлили (п. 49) въ функціи отъ девяти косинусовъ и ихъ первыхъ производныхъ по времени.

Въ динамикѣ удобно вводить непосредственно три независимыхъ угла, называемыхъ Эйлеровыми углами, и выразить составляющія p, q, r въ функціи отъ этихъ угловъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Этимъ мы и займемся.

Эйлеровы углы. — Пусть прямая OI (фиг. 151) будетъ пересѣченіемъ плоскости xOy съ плоскостью x_1Oy_1 ; выберемъ произвольно на этой прямой положительное направленіе OI и обозна-



Фиг. 151.

чимъ черезъ ψ уголъ между этимъ направленіемъ и направленіемъ Ox_1 , при чемъ этотъ уголъ считается положительнымъ отъ оси Ox_1 къ прямой OI въ сторону положительныхъ вращеній вокругъ оси Oz_1 . Прямая OI перпендикулярна къ плоскости zOz_1 . Назовемъ черезъ θ уголъ оси Oz съ осью Oz_1 , который считается положительнымъ по направленію отъ оси Oz_1 къ Oz въ сторону положительныхъ вращеній вокругъ оси OI . Осъ Oz перпендикулярна къ плоскости IOx ; обозначимъ черезъ ϕ уголъ, на который нуж-

но повернуть прямую OI въ положительную сторону вокругъ оси Oz , чтобы совмѣстить ее съ осью Ox . Тогда уголъ IOy равенъ $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Три угла θ , φ , ψ , очевидно, не зависятъ другъ отъ друга и могутъ быть выбраны произвольнымъ образомъ. Каждой системѣ значеній этихъ угловъ соотвѣтствуетъ одно и только одно положеніе подвижного трехграннаго угла $Oxyz$.

По аналогіи съ принятой въ астрономіи терминологіей, прямую OI называютъ иногда линіей узловъ, уголъ ψ — угломъ прецессіи, уголъ θ — угломъ нутаціи и φ — собственно угломъ вращенія. Этими названіями пользуются особенно въ томъ случаѣ, когда оси $Oxyz$ связаны съ тѣломъ, вращающимся вокругъ оси Oz .

Выраженія для составляющихъ p , q , r . — Чтобы привести трехгранный уголъ $Oxyz$ изъ положенія, которое онъ занимаетъ въ моментъ t и которое соотвѣтствуетъ значеніямъ θ , φ , ψ трехъ угловъ, въ бесконечно близкое положеніе, занимаемое имъ въ моментъ $t+dt$ и соотвѣтствующее угламъ $\theta+d\theta$, $\varphi+d\varphi$, $\psi+d\psi$, можно поступить слѣдующимъ образомъ ¹⁾.

Сперва мы повернемъ нашъ трехгранный уголъ вокругъ оси Oz_1 на уголъ $d\psi$; при этомъ уголъ ψ получитъ приращеніе $d\psi$, а углы θ и φ останутся безъ измѣненія. Затѣмъ мы вращаемъ трехгранный уголъ вокругъ новаго положенія прямой OI на уголъ $d\theta$; наконецъ, повернемъ нашъ трехгранный уголъ вокругъ новаго положенія оси Oz на уголъ $d\varphi$. Такъ какъ эти три угловые перемѣщенія совершаются за промежутокъ dt , то соотвѣтственныя угловые скорости вращенія суть производныя ψ' , θ' , φ' угловъ ψ , θ , φ по времени t .

Можно сказать, что мгновенное вращеніе ω нашего трехграннаго угла есть результирующая трехъ вращеній ψ' , θ' , φ' , совершаемыхъ соотвѣтственно вокругъ осей Oz_1 , OI , Oz . Эти три составляющія вращенія представлены (фиг. 151) отрѣзками, которые соотвѣтственно равны ψ' , θ' , φ' и отложены соотвѣтственно на осяхъ Oz_1 , OI и Oz . Результирующее вращеніе ω есть геометрическая сумма этихъ трехъ отрѣзковъ; поэтому его проекція на произвольную ось равна суммѣ проекцій составляющихъ ψ' , θ' и φ' на ту же ось.

Найдемъ сначала проекціи мгновеннаго вращенія ω подвижнаго трехграннаго угла на три взаимно перпендикулярныя оси OI , OJ , Oz ,

изъ которыхъ ось OJ лежитъ въ плоскости xOy и составляетъ съ осью OI уголъ $+\frac{\pi}{2}$; обозначимъ черезъ ω_i , ω_j , ω_z эти три проекции, изъ которыхъ третья есть r . Чтобы получить ихъ, достаточно замѣтить, что векторъ ψ' , лежащій въ плоскости zOJ , можетъ быть разложенъ на свои двѣ проекции ψ'_j и ψ'_z на осяхъ OJ и Oz , а именно:

$$\psi'_j = \psi' \sin \theta, \quad \psi'_z = \psi' \cos \theta.$$

Такимъ образомъ, три составляющія вектора ω по осямъ OI , OJ , Oz опредѣляются равенствами

$$\omega_i = \theta', \quad \omega_j = \psi' \sin \theta, \quad r = \psi' \cos \theta + \varphi'. \quad (1)$$

Чтобы получить затѣмъ p и q , достаточно составить сумму проекцій составляющихъ ω_i и ω_j на оси Ox и Oy ; такъ какъ прямоугольныя оси IOJ лежатъ въ плоскости xOy и ось Ox составляетъ съ осью OI уголъ φ , то имѣемъ непосредственно

$$p = \omega_i \cos \varphi + \omega_j \sin \varphi, \\ q = \omega_i \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \omega_j \cos \varphi.$$

Отсюда получаемъ, наконецъ, формулы для составляющихъ p , q , r :

$$\left. \begin{aligned} p &= \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, \\ q &= \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \\ r &= \psi' \cos \theta + \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Замѣчаніе. — Въ этихъ формулахъ три первые члена правыхъ частей представляютъ соотвѣтственно три проекціи вектора ψ' , направленнаго по оси Oz_1 , на оси Ox , Oy , Oz . Отсюда находимъ косинусы γ , γ' , γ'' угловъ оси Oz_1 , съ осями Ox , Oy , Oz :

$$\gamma = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma' = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma'' = \cos \theta. \quad (3)$$

Нужно замѣтить относительно формулъ (2), что въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ, въ особенности въ курсахъ небесной механики, углы θ и ψ считаются положительными въ противоположную сторону, такъ что формулы этихъ сочиненій выводятся изъ формулъ, которыми мы пользуемся здѣсь, путемъ замѣны угловъ θ и ψ на $-\theta$ и $-\psi$.

229. Живая сила и результирующій моментъ количествъ движенія. — 1° Живая сила. — Разсмотримъ точку M тѣла, кото-

рая имѣть массу m и координаты которой относительно осей $Oxyz$, связанныхъ съ тѣломъ, равны x, y, z ; проекціи на эти оси скорости v этой точки соответственно равны

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx. \quad (4)$$

Слѣдовательно, полная живая сила $2T$ равна

$$2T = \Sigma m [(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2]. \quad (5)$$

Раскрывая скобки и полагая, какъ мы это дѣлали въ теоріи моментовъ инерціи,

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m (y^2 + z^2), & B &= \Sigma m (z^2 + x^2), & C &= \Sigma m (x^2 + y^2), \\ D &= \Sigma m yz, & E &= \Sigma m zx, & F &= \Sigma m xy, \end{aligned}$$

мы найдемъ, что

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq, \quad (6)$$

гдѣ A, B, C суть моменты инерціи тѣла вокругъ осей Ox, Oy, Oz , а D, E, F суть произведенія инерціи.

2° Результирующій моментъ количествъ движенія около неподвижной точки. — Пусть $O\sigma$ будетъ главный моментъ количествъ движенія различныхъ точекъ тѣла около точки O . Найдемъ проекціи λ, μ, ν этого вектора на оси $Oxyz$, связанныхъ съ тѣломъ. Количество λ есть сумма моментовъ количествъ движенія около оси Ox . Имѣемъ, слѣдовательно:

$$\lambda = \Sigma m (yv_z - zv_y) = \Sigma m [y(py - qx) - z(rx - pz)].$$

Но изъ выраженія (5) для живой силы $2T$ мы видимъ непосредственно, что λ есть частная производная количества T по p :

$$\lambda = \frac{\partial T}{\partial p};$$

точно такъ же

$$\mu = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad \nu = \frac{\partial T}{\partial r},$$

т. е., согласно равенству (6):

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= Ap - Fq - Er, \\ \mu &= Bq - Dr - Fp, \\ \nu &= Cr - Ep - Dq. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3° Частный случай, когда оси, связанныя съ тѣломъ, суть главные оси инерціи для точки O . — Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$D = E = F = 0.$$

Слѣдовательно, живая сила равна

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

а суммы λ , μ , ν моментовъ количествъ движенія будутъ:

$$\lambda = Ap, \quad \mu = Bq, \quad \nu = Cr.$$

230. Задача динамики; уравненія Эйлера. — Предположимъ, что требуется найти движеніе твердаго тѣла, которое вращается около неподвижной точки и находится подъ дѣйствіемъ извѣстныхъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$. Внѣшними силами, приложенными къ тѣлу, здѣсь будутъ данныя силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ и неизвѣстная реакція Q неподвижной точки O .

Чтобы получить уравненія движенія въ простой формѣ, предложенной Эйлеромъ, примемъ три главные оси инерціи Ox, Oy, Oz для точки O за оси, связанныя съ тѣломъ.

Примѣнимъ теорему о моментахъ количествъ движенія въ геометрической формѣ, данной въ п. 202.

Пусть $O\sigma$ и OS будутъ главные моменты около точки O количествъ движенія и внѣшнихъ силъ. Обозначимъ черезъ λ, μ, ν проекціи вектора $O\sigma$ на оси Ox, Oy, Oz ; тогда

$$\lambda = Ap, \quad \mu = Bq, \quad \nu = Cr. \quad (1)$$

Назовемъ, съ другой стороны, черезъ L, M, N проекціи вектора OS на тѣ же самыя оси, т. е. суммы моментовъ внѣшнихъ силъ около осей Ox, Oy, Oz ; эти суммы не зависятъ отъ неизвѣстной реакціи точки O , потому что моменты этой реакціи около трехъ осей равны нулю.

Нужно написать, что абсолютная скорость точки σ геометрически равна вектору OS , т. е. что проекція этой скорости на каждую изъ осей Ox, Oy, Oz равна проекціи вектора OS на ту же ось. Точка σ движется относительно осей Ox, Oy, Oz , и въ то же время эти оси переносятся вмѣстѣ съ тѣломъ. Абсолютная скорость точки σ есть геометрическая сумма ея скорости относительно осей Ox, Oy, Oz и ея переносной скорости. Такъ какъ точка σ имѣетъ относительныя

координаты λ , μ , ν , то проекции ея относительной скорости на оси $Oxyz$ равны

$$\frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\mu}{dt}, \quad \frac{d\nu}{dt};$$

переносная скорость точки σ , обусловленная мгновеннымъ вращеніемъ подвижныхъ осей $Oxyz$, имѣетъ проекции

$$qv - r\mu, \quad r\lambda - p\nu, \quad p\mu - q\lambda.$$

Сложивъ проекции относительной и переносной скоростей, получимъ соотвѣтственные проекции абсолютной скорости.

Мы имѣемъ, такимъ образомъ, уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} + qv - r\mu &= L, \\ \frac{d\mu}{dt} + r\lambda - p\nu &= M, \\ \frac{d\nu}{dt} + p\mu - q\lambda &= N. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставивъ вмѣсто λ , μ , ν ихъ значенія $A\rho$, Bq , Cr изъ уравненій (1), мы получимъ уравненія движенія

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\rho}{dt} + (C - B)qr &= L, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= N, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

называемыя Эйлеровыми уравненіями.

Мы знаемъ, кромѣ того (п. 228), что количества p , q , r связаны съ Эйлеровыми углами слѣдующими уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi, \\ q &= \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi, \\ r &= \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Шесть совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка (3) и (4) опредѣляютъ шесть неизвѣстныхъ p , q , r , θ , φ , ψ

въ функціи времени и, слѣдовательно, опредѣляютъ движеніе. Общіе интегралы этой системы содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ, которыя опредѣляются начальными условіями, т. е. начальнымъ положеніемъ, соотвѣтствующимъ заданнымъ значеніямъ $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ трехъ Эйлеровыхъ угловъ, и скоростью начального мгновеннаго вращенія, соотвѣтствующей заданнымъ значеніямъ p_0, q_0, r_0 трехъ составляющихъ вращенія.

Исключеніе трехъ неизвѣстныхъ p, q, r изъ уравненій (3) и (4) приводитъ вопросъ къ тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ второго порядка, дающимъ неизвѣстныя θ, φ, ψ . Вообще же придется разсматривать совмѣстно шесть уравненій, потому что количества L, M, N , за исключеніемъ весьма частныхъ случаевъ, зависятъ отъ положенія тѣла, т. е. отъ угловъ θ, φ, ψ .

231. Реакція неподвижной точки. — Чтобы опредѣлить реакцію Q неподвижной точки, мы воспользуемся геометрическимъ представленіемъ теоремы о проекціяхъ количествъ движенія. Пусть Oq и OR будутъ главные векторы въ точкѣ O количествъ движенія и внѣшнихъ силъ; абсолютная скорость точки q геометрически равна вектору OR .

Пусть α, β, γ будутъ координаты точки q относительно подвижныхъ осей, X, Y, Z — проекціи на оси геометрической суммы непосредственно приложенныхъ силъ и X', Y', Z' — проекціи реакціи Q ; тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + q\gamma - r\beta &= X + X', \\ \frac{d\beta}{dt} + r\alpha - p\gamma &= Y + Y', \\ \frac{d\gamma}{dt} + p\beta - q\alpha &= Z + Z', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Вычислимъ α, β, γ . Мы имѣемъ

$$\alpha = \sum m v_x = \sum m (qz - ry) = q \sum m z - r \sum m y,$$

или, назвавъ черезъ M массу всей системы и черезъ ξ, η, ζ координаты центра тяжести (которыя по отношенію къ подвижнымъ осямъ суть величины постоянныя), находимъ:

$$\alpha = M (q\zeta - r\eta), \quad \beta = M (r\xi - p\zeta), \quad \gamma = M (p\eta - q\xi).$$

Подставивъ въ уравненія (5) вмѣсто количествъ α , β , γ предыдущія значенія, получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} \xi \frac{dq}{dt} - \eta \frac{dr}{dt} + q(p\eta - q\xi) - r(r\xi - p\zeta) &= \frac{X + X'}{M}, \\ \xi \frac{dr}{dt} - \zeta \frac{dp}{dt} + r(q\zeta - r\eta) - p(p\eta - q\xi) &= \frac{Y + Y'}{M}, \\ \eta \frac{dp}{dt} - \xi \frac{dq}{dt} + p(r\xi - p\zeta) - q(q\zeta - r\eta) &= \frac{Z + Z'}{M}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если тѣло подвѣшено въ центрѣ тяжести, то $\xi = \eta = \zeta = 0$, и предыдущія уравненія приводятся къ виду

$$X + X' = 0, \quad Y + Y' = 0, \quad Z + Z' = 0.$$

Мы видимъ, что въ этомъ случаѣ реакція такова, какъ если бы тѣло было неподвижнымъ, а непосредственно приложенныя силы были замѣнены ихъ результирующей OR , приложенной въ точкѣ O .

V. — СЛУЧАЙ, КОГДА НЕПОСРЕДСТВЕННО ПРИЛОЖЕННЫЯ СИЛЫ ПОСТОЯННО ПРИВОДЯТСЯ КЪ ОДНОЙ ТОЛЬКО СИЛѢ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗЪ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ.

232. Первые интегралы. — Въ самомъ простомъ случаѣ непосредственно приложенныя силы имѣютъ результирующую, проходящую черезъ неподвижную точку O , какъ это имѣетъ мѣсто для тяжелаго твердаго тѣла, подвѣшеннаго въ центрѣ тяжести.

Главный моментъ внѣшнихъ силъ около точки O равенъ тогда нулю; количества L , M , N (п. 230) суть нули, и уравненія Эйлера таковы:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= 0, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= 0, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Такъ какъ эти уравненія содержатъ только количества p , q , r и не содержатъ угловъ θ , φ , ψ , то интегрированіе уравненій движенія производится въ два приѣма: сперва нужно интегрировать Эйлеровы уравненія (1), дающія p , q , r въ функціи отъ t , а затѣмъ приходится вычислить углы θ , φ , ψ въ функціи отъ t .

Система (1) допускаетъ два первыхъ интеграла, которые легко составить. Умноживъ уравненія (1) соотвѣтственно на p, q, r и сложивъ, мы получимъ соотношеніе

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0,$$

или, интегрируя и называя черезъ h произвольную постоянную, имѣемъ:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h. \quad (2)$$

Умноживъ теперь уравненія (1) соотвѣтственно на Ap, Bq, Cr и сложивъ ихъ, мы получимъ уравненіе

$$A^2p \frac{dp}{dt} + B^2q \frac{dq}{dt} + C^2r \frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда, интегрируя и обозначая черезъ l^2 произвольную постоянную, найдемъ, что

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2. \quad (3)$$

Значеніе этихъ интеграловъ. — Эти два интеграла имѣютъ простое значеніе. Живая сила всего тѣла равна $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ (п. 229); уравненіе (2) выражаетъ, слѣдовательно, что живая сила системы остается постоянной. Это можно видѣть непосредственно; дѣйствительно, внѣшнія силы приводятся къ одной лишь силѣ, приложенной къ точкѣ O , и работа этой силы равна нулю.

Чтобы интерпретировать уравненіе (3), вспомнимъ, что координаты точки σ , т. е. проекціи на осяхъ координатъ главнаго момента количества движенія, равны Ap, Bq, Cr (п. 229). Уравненіе (3) выражаетъ, слѣдовательно, что этотъ главный моментъ имѣетъ постоянную длину. Это вытекаетъ также изъ общихъ теоремъ. Такъ какъ количества L, M, N равны нулю, то векторъ OS есть нуль, и абсолютная скорость точки σ также равна нулю. Эта точка, слѣдовательно, неподвижна, и длина вектора $O\sigma$ есть величина постоянная.

233. Изученіе движенія; интегрированіе приводится къ квадратурѣ. — Система (1) эквивалентна той, которая получится, если два изъ ея уравненій замѣнимъ только - что найденными первыми интегралами.

Предположимъ сначала, что $A > B > C$. Сохранимъ Эйлерово уравненіе, относящееся къ средней оси инерціи, и возьмемъ систему

$$\left. \begin{aligned} A p^2 + B q^2 + C r^2 &= D \mu^2, \\ A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 &= D^2 \mu^2, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для того, чтобы формулы были однородны, мы ввели двѣ новыя произвольныя постоянныя D и μ^2 , положивъ

$$h = D\mu^2, \quad l^2 = D^2\mu^2.$$

Опредѣливъ значенія p^2 и r^2 изъ первыхъ двухъ уравненій и подставивъ въ третье, мы будемъ имѣть дифференціальное уравненіе перваго порядка относительно q . Исключеніе неизвѣстной r изъ двухъ первыхъ уравненій даетъ:

$$Ap^2(A-C) + Bq^2(B-C) = D(D-C)\mu^2.$$

Принимая во вниманіе относительныя величины количествъ A , B , C , мы видимъ, что разность $D - C$ есть существенно положительная величина; она могла бы быть равной нулю лишь въ томъ случаѣ, если бы начальныя значенія p и q оба были нулями. Этотъ частный случай мы рассмотримъ позже, теперь же мы оставимъ его въ сторонѣ. Предыдущее уравненіе даетъ:

$$p^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)}(f^2 - q^2), \quad f^2 = \mu^2 \frac{D(D-C)}{B(B-C)}.$$

Если исключить случай, когда разность $A - D$ равна нулю, то аналогичное вычисленіе дастъ намъ значеніе r^2 :

$$r^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)}(g^2 - q^2), \quad g^2 = \mu^2 \frac{D(A-D)}{B(A-B)}.$$

Для того, чтобы значенія p и r были вещественными, необходимо, чтобы меньшая изъ двухъ постоянныхъ f^2 и g^2 была больше, чѣмъ q^2 . Но

$$g^2 - f^2 = \mu^2 \frac{D(A-C)(B-D)}{B(B-C)(A-B)},$$

слѣдовательно, разность $g^2 - f^2$ имѣетъ такой же знакъ, какъ и разность $B - D$, знакъ которой извѣстенъ изъ начальныхъ условий. Частный случай, когда $B - D = 0$, мы рассмотримъ позже; теперь же для бѣльшей опредѣленности предположимъ, что

$$B - D > 0, \quad g^2 > f^2.$$

Перемѣнная q должна въ такомъ случаѣ измѣняться между $-f$ и $+f$; слѣдовательно, r никогда не обращается въ нуль и постоянно сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, а именно — знакъ начальнаго значенія r_0 . Предположимъ, что $r > 0$. Наоборотъ, перемѣнная p

обращается въ нуль всякій разъ, какъ $q = \pm f$; при возрастаніи q производная $\frac{dq}{dt} > 0$, и третье изъ уравненій (4) показываетъ, что тогда $p < 0$; при убываніи же q переменная $p > 0$. Основываясь на этихъ соображеніяхъ, мы знаемъ для каждаго момента, какой знакъ нужно взять передъ радикалами, опредѣляющими $\dot{p}$ и r въ функціи отъ q .

Подставивъ эти значенія p и r въ третье изъ уравненій (4), мы найдемъ, что

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} \sqrt{(f^2 - q^2)(g^2 - q^2)};$$

здѣсь передъ радикаломъ нужно взять знакъ $+$ при возрастаніи q до момента, когда q получить значеніе $+f$; затѣмъ, когда q убываетъ отъ значенія $+f$ до $-f$, передъ радикаломъ нужно взять минусъ и т. д..

Мы видимъ, что t выражается въ функціи отъ q посредствомъ эллиптического интеграла.

Вычисленіе Эйлеровыхъ угловъ въ функціи отъ времени. — Чтобы окончить рѣшеніе задачи, теперь необходимо вычислить три Эйлеровыхъ угла въ функціи отъ времени. Для упрощенія предположимъ, что за ось z_1 -овъ мы приняли ось $O\sigma$, имѣющую неизмѣнное направленіе главнаго момента количествъ движенія; эта ось $O\sigma$ извѣстна изъ начальныхъ условій. Напишемъ, что проекціи отрѣзка $O\sigma = D\mu$ на подвижныя оси равны соотвѣтственно Ap , Bq , Cr ; тогда

$$\left. \begin{aligned} D\mu \sin \theta \sin \varphi &= Ap, \\ D\mu \sin \theta \cos \varphi &= Bq, \\ D\mu \cos \theta &= Cr, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

такъ какъ векторъ $O\sigma = D\mu$ можно разсматривать, какъ геометрическую сумму вектора $D\mu \cos \theta$, лежащаго на оси Oz , и вектора $D\mu \sin \theta$, лежащаго на прямой OJ (фиг. 152), которая находится въ плоскости xOy и перпендикулярна къ прямой OI пересѣченія плоскостей xOy и x_1Oy_1 . Уравненія (5) совмѣстимы въ силу второго изъ уравненій (4); они безъ интегрированія даютъ углы θ и φ въ функціи отъ p , q , r .

Чтобы вычислить уголъ ψ , мы воспользуемся двумя первыми изъ уравненій (4) въ п. 230:

$$\dot{p} = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi,$$

$$q = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi;$$

исключивъ $\frac{d\theta}{dt}$, мы найдемъ отсюда:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\dot{p} \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

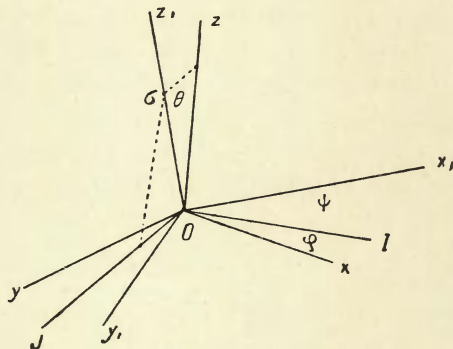
Но уравненія (5) даютъ намъ:

$$\dot{p} \sin \varphi + q \cos \varphi = \frac{A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2}{D\mu \sin \theta}, \quad D^2\mu^2 \sin^2 \theta = A^2\dot{p}^2 + B^2\dot{q}^2;$$

слѣдовательно, выраженіе производной $\frac{d\psi}{dt}$ принимаетъ такой видъ:

$$\frac{d\psi}{dt} = D\mu \frac{A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2}{A^2\dot{p}^2 + B^2\dot{q}^2}.$$

Такъ какъ $\frac{d\psi}{dt} > 0$, то уголъ ψ постоянно возрастаетъ; плоскость z_1Oz постоянно вращается въ положительномъ направленіи вокругъ



Фиг. 152.

оси Oz_1 , т. е. вокругъ оси $O\sigma$. Подставивъ вмѣсто $\dot{p}$ и $\dot{q}$ ихъ значенія въ функціи отъ t , мы получимъ посредствомъ квадратуры уголъ ψ въ функціи отъ t .

Чтобы окончить вычисленіе и разсмотрѣть подробнѣе обстоятельства движенія, пришлось бы прибѣгнуть къ теоріи эллиптическихъ функцій. Такъ какъ геометрическій методъ Пуансо (п. 236)

даетъ простую интерпретацію движенія, то мы здѣсь не будемъ останавливаться на аналитическомъ изслѣдованіи; читатель найдетъ его въ курсѣ Аппелля.

234. Начальныя частныя условія. — Разберемъ теперь частные случаи, разсмотрѣніе которыхъ мы раньше отложили.

1° Предположимъ сперва, что $D=C$; мы видѣли, что это условіе можетъ выполняться лишь въ томъ случаѣ, когда начальныя значенія p_0 и q_0 равны нулю. Тогда уравненіе

$$Ap^2(A-C) + Bq^2(B-C) = D(D-C)\mu^2 = 0$$

показываетъ, что постоянно $p=0$, $q=0$. Слѣдовательно, мгновенная ось вращенія во время движенія постоянно совпадаетъ съ осью Oz . Въ тѣлѣ имѣется неподвижная относительно него прямая. Она неподвижна также и въ пространствѣ; дѣйствительно, первыя два изъ уравненій (5)

$$D\mu \sin \theta \sin \varphi = Ap, \quad D\mu \sin \theta \cos \varphi = Bq$$

показываютъ, что въ случаѣ, когда величины p и q равны нулю, уголъ θ тоже есть нуль; слѣдовательно, мгновенная ось Oz совпадаетъ съ осью Oz_1 , неподвижной въ пространствѣ. Въ этомъ случаѣ движеніе есть вращеніе вокругъ неподвижной оси. Третье изъ уравненій (5)

$$D\mu \cos \theta = Cr,$$

даетъ

$$r = \mu,$$

ибо $D=C$ и $\theta=0$; это вращеніе остается постояннымъ. Мы находимъ здѣсь свойство перманентныхъ осей вращенія (п. 224). Предположимъ, что въ начальный моментъ тѣло вращается вокругъ оси Oz , которая служить главной осью инерціи для точки O ; это вращательное движеніе продолжается безпредѣльно.

2° Предположимъ, что $D=A$. Два первыхъ изъ уравненій (4) даютъ, по исключеніи p ,

$$Bq^2(A-B) + Cr^2(A-C) = 0;$$

слѣдовательно, этотъ частный случай можетъ представиться лишь тогда, когда $q_0=0$, $r_0=0$. Въ этомъ случаѣ $q=0$, $r=0$ постоянно; мгновенная ось вращенія совпадаетъ съ осью Ox во все время движенія. Такъ какъ $p=r=0$, то уравненія (5) даютъ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

мгновенная ось Ox совпадает съ осью Oz_1 , и остается неподвижной въ пространствѣ. Мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$D\mu \sin\theta \sin\varphi = A\rho \quad \text{или} \quad \rho = \mu.$$

Движеніе будетъ по-прежнему вращеніемъ съ постоянной угловой скоростью вокругъ перманентной оси вращенія.

3° Предположимъ, наконецъ, что $D=B$. Исключивъ q изъ двухъ первыхъ уравненій (4), мы получимъ

$$A\rho^2 (A-B) - Cr^2 (B-C) = D (D-B) \mu^2 = 0. \quad (6)$$

Слѣдовательно, для того, чтобы разсматриваемый случай могъ имѣть мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы въ началѣ движенія выполнялось равенство

$$A\rho_0^2 (A-B) - Cr_0^2 (B-C) = 0,$$

т. е. чтобы имѣло мѣсто соотношеніе

$$\frac{\rho_0}{r_0} = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}.$$

Если это условіе выполнено, то, согласно уравненію (6), имѣемъ постоянно:

$$\frac{\rho}{r} = \pm \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}} = \frac{\rho_0}{r_0},$$

изъ чего видно, что геометрическое мѣсто послѣдовательныхъ положеній мгновенной оси въ тѣлѣ приводится къ плоскости $x = \frac{\rho_0}{r_0} z$, проходящей черезъ среднюю ось.

Въ занимающемъ насъ случаѣ

$$g^2 = f^2 = \mu^2,$$

и всѣ интегрированія могутъ быть выполнены посредствомъ элементарныхъ функций. Дѣйствительно, формулы п. 233, дающія ρ , q , r , преобразуются въ слѣдующія:

$$\rho = \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \sqrt{\mu^2 - q^2}, \quad r = \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \sqrt{\mu^2 - q^2},$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}} (\mu^2 - q^2)^{\frac{3}{2}};$$

здѣсь передъ радикалами мы беремъ надлежащіе знаки;

Положимъ

$$n = \mu \sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}};$$

последнее уравнение даетъ намъ:

$$\frac{n}{\mu} dt = \frac{dq}{\mu^2 - q^2},$$

$$2ndt = \frac{dq}{\mu - q} + \frac{dq}{\mu + q},$$

откуда, интегрируя, получимъ уравненіе

$$2n(t - t_0) = \log \frac{\mu + q}{\mu - q},$$

гдѣ t_0 обозначаетъ моментъ, когда $q = 0$. Отсюда выводимъ:

$$\frac{\mu + q}{\mu - q} = e^{2n(t-t_0)}, \quad q = \mu \frac{e^{n(t-t_0)} - e^{-n(t-t_0)}}{e^{n(t-t_0)} + e^{-n(t-t_0)}}$$

или

$$\frac{q}{e^{n(t-t_0)} - e^{-n(t-t_0)}} = \frac{\mu}{e^{n(t-t_0)} + e^{-n(t-t_0)}} = \frac{\sqrt{\mu^2 - q^2}}{2}.$$

Окончательно мы получаемъ:

$$p = 2\mu \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}} \frac{1}{e^{n(t-t_0)} + e^{-n(t-t_0)}},$$

$$q = \mu \frac{e^{n(t-t_0)} - e^{-n(t-t_0)}}{e^{n(t-t_0)} + e^{-n(t-t_0)}},$$

$$r = 2\mu \sqrt{\frac{B(A-B)}{C(A-C)}} \frac{1}{e^{n(t-t_0)} + e^{-n(t-t_0)}}.$$

Ясно, что при безпредѣльномъ возрастаніи t , q стремится къ предѣлу μ , тогда какъ p и r стремятся къ предѣлу 0. Уравненія (5) показываютъ тогда, что θ стремится къ предѣлу $\frac{\pi}{2}$ и φ къ предѣлу 0. Движеніе стремится перейти во вращеніе съ постоянной угловой скоростью, равной μ , вокругъ средней оси инерціи, а эта ось стремится расположиться по оси Oz_1 .

235. Случай, когда эллипсоидъ инерціи, соотвѣтствующій точкѣ O , есть поверхность вращенія. — Разсмотримъ, наконецъ, случай, когда эллипсоидъ инерціи есть поверхность вращенія. Предположимъ, на примѣръ, что $A = B$. Мы все еще можемъ выполнить квадратуры.

Третье уравненіе Эйлера

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = 0$$

даетъ

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad r = r_0.$$

Третье изъ уравненій (5)

$$D\mu \cos \theta = Cr = Cr_0$$

даетъ

$$\cos \theta = \frac{Cr_0}{D\mu}, \quad \theta = \theta_0.$$

Теперь изъ двухъ первыхъ уравненій (5) мы выводимъ:

$$\dot{p} = \frac{D\mu \sin \theta_0}{A} \sin \varphi, \quad q = \frac{D\mu \sin \theta_0}{A} \cos \varphi. \quad (7)$$

Формула

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\dot{p} \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta_0}$$

даетъ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{D\mu}{A}, \quad \psi = \psi_0 + \frac{D\mu}{A} t. \quad (8)$$

Наконецъ, уравненіе

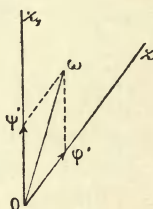
$$\frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} = r = r_0$$

даетъ

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - \frac{D\mu}{A} \cos \theta_0 = \frac{(A - C)r_0}{A}, \quad (9)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(A - C)r_0}{A} t.$$

По формуламъ (7) можно теперь опредѣлить $\dot{p}$ и q .



Фиг. 153.

Мы знаемъ (п. 228), что мгновенное вращеніе ω есть геометрическая сумма трехъ вращеній $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, направленныхъ соответственно по осямъ OI , Oz и Oz_1 . Въ разсматриваемомъ случаѣ уголъ $zOz_1 = \theta$ есть величина постоянная, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, а $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d\psi}{dt}$ суть по-

стоянныя величины. Мгновенное вращеніе ω есть діагональ параллелограмма, построеннаго на вращеніяхъ $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ (фиг. 153), какъ на сторонахъ; этотъ параллелограммъ все время движенія остается равнымъ самому себѣ. Поэтому геометрическое мѣсто мгновенной оси въ тѣлѣ есть конусъ вращенія съ осью Oz ; геометрическое мѣсто мгновенной оси въ пространствѣ есть конусъ вращенія, имѣющій ось Oz_1 . Дѣйствительное движеніе получится, если заставимъ первый конусъ катиться равномерно по второму (п. 51).

236. Геометрическое представленіе движенія по Пуансо. — Пуансо показалъ, что движеніе твердаго тѣла, которое имѣетъ неподвижную точку и находится подъ дѣйствіемъ силъ, эквивалентныхъ лишь одной равнодѣйствующей, проходящей черезъ эту неподвижную точку, можетъ быть представлено каченіемъ и верченіемъ, безъ скольженія, эллипсоида инерціи, соотвѣтствующаго неподвижной точкѣ на неподвижной плоскости.

Этотъ геометрическій методъ основанъ на трехъ слѣдующихъ теоремахъ.

Разсмотримъ эллипсоидъ инерціи тѣла, соотвѣтствующій неподвижной точкѣ, и обозначимъ черезъ Ox , Oy , Oz главные оси этого эллипсоида. Точку m , въ которой ось мгновеннаго вращенія ω пересѣкается съ поверхностью эллипсоида, Пуансо называетъ полюсомъ.

Теорема 1. — Живая сила твердаго тѣла равна $\frac{\omega^2}{Om^2}$.

Дѣйствительно, согласно опредѣленію эллипсоида инерціи, моментъ инерціи тѣла вокругъ оси Om равенъ $\frac{1}{Om^2}$; такъ какъ скорости точекъ тѣла таковы, какъ если бы оно вращалось съ угловой скоростью ω вокругъ оси Om , то живая сила $\sum mv^2$ равна произведенію $\frac{\omega^2}{Om^2}$ момента инерціи на квадратъ угловой скорости (п. 213).

Теорема 2. — Въ каждый моментъ плоскость, касательная къ эллипсоиду инерціи въ полюсѣ m , перпендикулярна къ главному моменту Ob количествъ движенія.

Дѣйствительно, уравненіе эллипсоида инерціи, отнесеннаго къ осямъ Ox , Oy , Oz , есть

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

Такъ какъ направляющіе косинусы оси $O\omega$ равны $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, то координаты полюса m относительно тѣхъ же осей будутъ

$$x = \overline{Om} \frac{p}{\omega}, \quad y = \overline{Om} \frac{q}{\omega}, \quad z = \overline{Om} \frac{r}{\omega}.$$

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ m будетъ, слѣдовательно:

$$\frac{\overline{Om}}{\omega} (Ap x + Bq y + Cr z) = 1,$$

это есть уравненіе плоскости, перпендикулярной къ отрезку Os , проекція котораго равны Ap , Bq , Cr .

ТЕОРЕМА 3. — Разстояніе неподвижной точки отъ плоскости, касательной къ эллипсоиду инерціи въ полюсѣ, равно квадратному корню изъ живой силы, раздѣленному на главный моментъ количествъ движенія.

Дѣйствительно, разстояніе δ начала O отъ касательной плоскости равно

$$\delta = \frac{\omega}{\overline{Om}} \frac{1}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}},$$

что и требовалось доказать.

Примѣнимъ эти три теоремы къ частному случаю, когда силы, приложенныя къ твердому тѣлу, даютъ лишь равнодѣйствующую, проходящую черезъ неподвижную точку. Тогда: 1° живая сила остается постоянной и равна h или $D\mu^2$; слѣдовательно,

$$\frac{\omega}{\overline{Om}} = \sqrt{h} = \mu \sqrt{D};$$

2° главный моментъ $O\sigma$ количествъ движенія имѣетъ постоянное направленіе, и, слѣдовательно, плоскость, касательная къ эллипсоиду въ точкѣ m , имѣетъ неизмѣнное направленіе, перпендикулярное къ $O\sigma$; 3° такъ какъ главный моментъ $O\sigma$ имѣетъ постоянную длину l или $D\mu$, то разстояніе касательной плоскости въ точкѣ m отъ центра O равно

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = \frac{1}{\sqrt{D}};$$

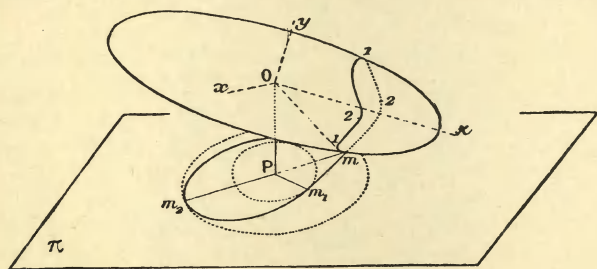
это разстояніе, слѣдовательно, есть величина постоянная. Такимъ образомъ, касательная плоскость Π въ точкѣ m неподвижна, потому что она имѣетъ неизмѣнную оріентировку и ея разстояніе отъ неподвижной точки O остается постояннымъ.

Итакъ, мы доказали, что эллипсоидъ инерціи постоянно касается неподвижной плоскости Π (фиг. 154). Точка касанія m есть полюсъ; прямая Om служитъ мгновенной осью, и угловая скорость мгновеннаго вращенія равна

$$\omega = \overline{Om} \sqrt{h};$$

эта скорость измѣняется пропорціонально разстоянію Om . Кривую, описываемую полюсомъ m на поверхности эллипсоида, Пуансо называетъ полодіей, а кривую, описываемую полюсомъ на неподвижной плоскости Π — герполодіей.

Конусъ, который служитъ геометрическимъ мѣстомъ мгновенныхъ осей въ тѣлѣ, имѣетъ вершину въ точкѣ O , а его направляющей служитъ полодія; геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ



Фиг. 154.

пространствѣ есть конусъ, вершиной котораго служитъ точка O , а направляющей — герполодія. Изучаемое нами движеніе получится, если первый конусъ катить по второму такимъ образомъ, что мгновенная угловая скорость ω въ каждый моментъ будетъ пропорціональна $\overline{Om}$, ибо

$$\omega = \overline{Om} \sqrt{h}.$$

Точка эллипсоида, которая касается неподвижной плоскости Π , обладаетъ въ каждый моментъ скоростью нуль, потому что она находится на мгновенной оси; поэтому мы можемъ также сказать, что рассматриваемое движеніе получается при каченіи и верченіи эллипсоида инерціи по неподвижной плоскости Π . Положеніе этой неподвижной плоскости опредѣляется начальными условіями.

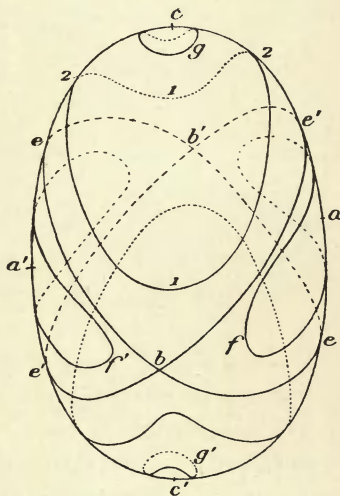
Полодія. — Найдемъ уравненія полодіи. Для этого отнесемъ эллипсоидъ инерціи къ его осямъ; пусть его уравненіе будетъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad (10)$$

Мы можем опредѣлять полодію, какъ геометрическое мѣсто точекъ $m(x, y, z)$ этого эллипсоида, для которыхъ касательная плоскость находится на постоянномъ разстояніи $\delta = \frac{1}{\sqrt{D}}$ отъ начала. Это условіе выражается уравненіемъ

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = D. \quad (11)$$

Уравненія (10) и (11) опредѣляютъ полодію, которая представляетъ собою, такимъ образомъ, алгебраическую кривую четвертаго порядка. Чтобы уяснить себѣ форму этой кривой, мы можемъ раз-



Фиг. 155.

сматривать ее, какъ пересѣченіе эллипсоида и конуса, который служить геометрическимъ мѣстомъ мгновенныхъ осей Om въ тѣлѣ. Чтобы получить уравненіе этого конуса, составимъ изъ уравненій (10) и (11) однородное уравненіе

$$A(A-D)x^2 + B(B-D)y^2 + C(C-D)z^2 = 0.$$

Для того, чтобы этотъ конусъ былъ вещественнымъ, необходимо, чтобы (предполагая по-прежнему $A > B > C$) имѣли мѣсто соотношенія

$$A \geq D \geq C.$$

это условіе выражаетъ, очевидно, что разстояніе $\frac{1}{\sqrt{D}}$ касательной плоскости отъ начала должно быть меньше большой оси $\frac{1}{\sqrt{C}}$ и больше малой оси $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Если $D=C$ или $D=A$, то конусъ приводится къ парѣ сопряженныхъ мнимыхъ плоскостей, т. е. къ прямой, совпадающей съ осью Ox или Oz ; полодія въ этомъ случаѣ состоитъ изъ двухъ точекъ c и c' или a и a' (фиг. 155). Если $D=B$, то конусъ распадается на двѣ вещественныя плоскости, проходящія черезъ среднюю ось

$$x = \pm z \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}.$$

Это тѣ самыя плоскости, которыя мы уже встрѣчали при аналитическомъ изученіи задачи (п. 234); полодія состоитъ въ этомъ случаѣ изъ двухъ эллипсовъ e, e' , пересѣкающихся на концахъ b, b' средней оси.

Полодія есть, слѣдовательно, пересѣченіе эллипсоида съ конусомъ второго порядка, имѣющимъ тѣ же самыя плоскости симметріи. Она состоитъ изъ двухъ различныхъ замкнутыхъ вѣтвей, симметричныхъ одна къ другой относительно центра и одной изъ главныхъ плоскостей эллипсоида; для каждой вѣтви двѣ другія главные плоскости эллипсоида служатъ плоскостями симметріи, а въ четырехъ вершинахъ 1, 1, 2, 2 каждой вѣтви радіусъ-векторъ Om есть *minimum* или *maximum*.

Во время движенія одна изъ вѣтвей полодіи катится по неподвижной плоскости Π . Нужна только эта вѣтвь; другая катится по плоскости, которая симметрична плоскости Π относительно точки O .

Весьма полезно представлять себѣ различныя формы полодіи въ зависимости отъ начальныхъ условій. Пусть (фиг. 155) aa', bb', cc' будутъ вершины эллипсоида. Константа D , смотря по начальнымъ условіямъ, колеблется между A и C . При $D=A$ конусъ, — геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ тѣлѣ, — обращается въ ось Ox , а полодія, пересѣченіе эллипсоида съ конусомъ, сводится къ точкѣ a и симметричной ей точкѣ a' . Когда D немного уменьшится, полодія будетъ состоять изъ маленькой замкнутой кривой f , окружающей точку a и симметричной кривой f' , окружающей точку a' . При дальнѣйшемъ уменьшеніи D кривыя f и f' удаляются отъ точекъ

a и a' , и при $D=B$ эти кривыя соединяются въ точкахъ b и b' , разлагаясь при этомъ на два эллипса e и e' . Точно такъ же при $D=C$ полодія сводится къ двумъ вершинамъ c и c' . При возрастаніи D она сперва состоитъ изъ двухъ малыхъ симметричныхъ кривыхъ g и g' , окружающихъ эти вершины; затѣмъ эти кривыя увеличиваются, и при $D=B$ онѣ снова переходятъ въ эллипсы e и e' .

Мы видимъ, такимъ образомъ, что есть два рода полодій: однѣ окружаютъ вершины малой оси, а другія — вершины большой оси; полодіи этихъ двухъ родовъ отдѣлены однѣ отъ другихъ особой полодіей, которая соотвѣтствуетъ случаю $D=B$ и состоитъ изъ двухъ эллипсовъ e и e' . Черезъ каждую точку поверхности проходить одна и только одна полодія; предполагая, что эти кривыя начерчены, мы легко можемъ найти полодію, соотвѣтствующую данному начальнымъ условіямъ: для этого достаточно знать точку m_0 , въ которой начальное мгновенное вращеніе встрѣчаетъ эллипсоидъ; полодія, проходящая черезъ точку m_0 , и будетъ искомой. Соотвѣтствующей же плоскостью Π будетъ плоскость, касательная въ точкѣ m_0 къ эллипсоиду въ его начальномъ положеніи.

Герполодія. — Если изъ неподвижной точки опустить перпендикуляръ OP (фиг. 154) на плоскость Π , то длина $OP = \frac{1}{\sqrt{D}}$. Слѣдовательно, радіусъ-векторъ $Pm = \varrho$ точки герполодіи равенъ

$$\varrho = \sqrt{Om^2 - \frac{1}{D}}.$$

Сообразно съ формой полодіи, радіусъ-векторъ Om принимаетъ различныя значенія между минимумомъ и максимумомъ; слѣдовательно, ϱ также измѣняется между соотвѣтствующими минимумомъ ϱ_1 и максимумомъ ϱ_2 ; поэтому герполодія содержится между двумя концентрическими окружностями радіусовъ ϱ_1 и ϱ_2 ; кривая послѣдовательно касается каждой изъ этихъ окружностей; своей вогнутостью она постоянно обращена къ точкѣ P и не имѣетъ точекъ перегиба. Доказательство послѣдняго свойства можно найти въ „Traité de Mécanique“ Аппелля.

Устойчивость вращенія вокругъ главныхъ осей. — Если тѣло начинаетъ вращаться вокругъ главной оси инерціи, то, какъ мы видѣли, вращеніе вокругъ этой оси продолжается, и мгновенная ось остается неподвижной въ тѣлѣ и въ пространствѣ. Можно поставить

вопросъ, будетъ ли это вращеніе устойчивымъ; смыслъ этого вопроса мы сейчасъ пояснимъ. Предположимъ, что вначалѣ мгновенная ось не вполне точно совпадаетъ съ одной изъ осей эллипсоида, но лишь очень близка къ этой оси; останется ли она очень близкой къ этой оси въ тѣлѣ и очень близкой къ неподвижному направленію въ пространствѣ? Мы сейчасъ увидимъ, что это будетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, если ось вращенія очень близка либо къ большой, либо къ малой оси эллипсоида инерціи. Въ самомъ дѣлѣ, если въ начальный моментъ мгновенная ось находится на очень маломъ разстояніи отъ конца c большой оси (фиг. 155), то полодія представляетъ собой очень маленькую кривую, окружающую точку c , и ось Om остается въ тѣлѣ весьма близко отъ $Ос$. Съ другой стороны, остающаяся неподвижной касательная плоскость въ точкѣ m удалена отъ точки O на разстояніи δ , весьма мало отличающемся отъ $\frac{1}{\sqrt{c}}$, поэтому длина Om очень мало отличается отъ $\frac{1}{\sqrt{c}}$, и радиусъ-векторъ $\varrho = Pm$ герполодіи (фиг. 154), опредѣляемый выраженіемъ

$$\varrho = \sqrt{Om^2 - \delta^2},$$

остається очень малымъ; ось Om будетъ очень мало отклоняться отъ неподвижнаго въ пространствѣ направленія OP . Вращеніе вокругъ оси $Ос$ будетъ, слѣдовательно, устойчивымъ. То же самое слѣдуетъ сказать и относительно вращенія вокругъ малой оси $Оа$.

Напротивъ, если тѣло вращается вначалѣ вокругъ оси, очень близкой къ оси Ob , то полюсъ описываетъ полодію, окружающую либо вершину a , либо вершину c ; ось отклоняется тогда на конечное разстояніе отъ своего начального положенія. Вращеніе вокругъ средней оси Ob называется неустойчивымъ.

VI. — ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДАГО ТЯЖЕЛАГО ТѢЛА ВОКРУГЪ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

237. Первые интегралы, доставляемые общими теоремами. — Разсмотримъ тяжелое твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной точки O . Неподвижными осями пусть будутъ три оси Ox_1, y_1, z_1 , при чемъ ось Oz_1 направлена вертикально вверхъ, а въ качествѣ подвижныхъ осей Ox, y, z , связанныхъ съ тѣломъ, мы возьмемъ главные оси инерціи для точки O . Назовемъ черезъ M

всю массу тѣла, черезъ ξ_1, η_1, ζ_1 координаты центра тяжести G относительно неподвижныхъ осей, черезъ ξ, η, ζ координаты той же точки относительно подвижныхъ осей (эти координаты не измѣняются съ временемъ) и сохранимъ другія, введенныя раньше, обозначенія.

Мы можемъ получить два первыхъ интеграла, которые не зависятъ отъ реакціи.

1° Интеграль живыхъ силъ. — Живая сила тѣла выражается формулой $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$; единственной непосредственно приложенной силой является вѣсъ Mg , имѣющий точку приложенія въ G , и работа реакціи точки O равна нулю. Имѣемъ, слѣдовательно:

$$d \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = - Mg d\xi_1,$$

откуда

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = - 2Mg\xi_1 + h. \quad (1)$$

2° Интеграль площадей. — Внѣшними силами являются реакція неподвижной точки, пересѣкающая ось Oz_1 , и вѣсъ, параллельный этой оси. Сумма моментовъ ихъ количествъ движенія около оси Oz_1 есть величина постоянная; иначе говоря, проекція на ось Oz_1 результирующаго момента $O\sigma$ количествъ движенія остается постоянной. Мы видѣли, что проекціями результирующаго момента $O\sigma$ на оси Ox, Oy, Oz служатъ количества Ap, Bq, Cr ; его проекція на ось Oz_1 равна, слѣдовательно, $Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma''$ (п. 228, замѣчаніе), т. е.

$$(Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi) \sin \theta + Cr \cos \theta;$$

напишемъ, что эта проекція есть величина постоянная:

$$(Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi) \sin \theta + Cr \cos \theta = k. \quad (2)$$

Въ наиболѣе общемъ случаѣ мы не знаемъ другого перваго интеграла помимо двухъ указанныхъ.

Если центръ тяжести находится въ точкѣ O и во всемъ прочемъ тѣло остается произвольнымъ, то, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, изученіе движенія приводится къ квадратурамъ.

Теперь мы подробно изучимъ другой частный случай, когда можно получить третій интеграль и привести задачу къ квадратурамъ.

238. Случай, когда эллипсоидъ инерціи, соотвѣтствующій неподвижной точкѣ, есть поверхность вращенія, и центръ тяжести лежитъ на оси вращенія. — Этотъ случай былъ изученъ Лагранжемъ и Пуассономъ.

Ось вращенія эллипсоида инерціи, соотвѣтствующаго точкѣ O , мы примемъ за ось Oz , и положительной стороною на этой оси будемъ считать направление OG ; тогда

$$A = B, \quad \xi = \eta = 0, \quad \zeta > 0.$$

Имѣемъ далѣе

$$\zeta_1 = \zeta \cos \theta,$$

потому что уголъ между осями Oz и Oz_1 равенъ θ .

Два интеграла (1) и (2) представятся въ видѣ

$$\left. \begin{aligned} A(p^2 + q^2) + Cr^2 &= -2Mg\zeta \cos \theta + h, \\ A(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + Cr \cos \theta &= k. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравненіе Эйлера для оси Oz ,

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N,$$

переходитъ въ

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

такъ какъ $A = B$ и $N = 0$; оно даетъ намъ третій интеграль

$$r = r_0. \quad (4)$$

Уравненія (3) и (4) можно написать такъ:

$$\left. \begin{aligned} p^2 + q^2 &= a - a \cos \theta, \\ (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta &= \beta - br_0 \cos \theta, \\ r &= r_0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

здѣсь мы ввели для сокращенія слѣдующія обозначенія:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2Mg\zeta}{A}, & b &= \frac{C}{A} \\ a &= \frac{h - Cr_0^2}{A}, & \beta &= \frac{k}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Замѣтимъ, что постоянныя a и b будутъ положительными, и что онѣ зависятъ лишь отъ разсматриваемаго тѣла; a и β суть произвольныя константы, опредѣляемыя начальными условіями.

Углы θ , φ , ψ и количества p , q , r связаны слѣдующими соотношеніями:

$$p = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi,$$

$$q = \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi,$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставивъ эти значенія въ уравненія (5), мы найдемъ

$$\sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \alpha - a \cos \theta,$$

$$\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = \beta - br_0 \cos \theta,$$

$$\frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} = r_0.$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій мы опредѣлимъ $\frac{d\psi}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$ въ функціи отъ θ , и, подставивъ полученныя значенія въ первое уравненіе, мы получимъ уравненіе относительно θ . Положивъ

$$\cos \theta = u,$$

мы найдемъ такимъ образомъ слѣдующія равенства

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}, \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - \frac{u(\beta - br_0 u)}{1 - u^2}, \quad (8)$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0 u)^2 = f(u). \quad (9)$$

Посредствомъ эллиптической квадратуры можно получить изъ уравненія (9) величину u въ функціи отъ t ; изъ уравненій (7) и (8) найдутся затѣмъ посредствомъ двухъ другихъ квадратуръ углы ψ и φ . Теорія эллиптическихъ функцій даетъ возможность выразить углы θ , φ , ψ посредствомъ непрерывныхъ функцій времени. Но мы можемъ также уяснить себѣ особенности изучаемаго движенія, не прибѣгая къ этой теоріи.

Полиномъ $f(u)$ будетъ отрицательнымъ при значеніяхъ $u = -\infty$, -1 , $+1$, и положительнымъ при начальномъ значеніи $u = u_0$, ко-

торое должно доставлять производной $\frac{du}{dt}$ вещественное значеніе, и при значеніи $u = +\infty$; полиномъ имѣетъ, слѣдовательно, три вещественныхъ корня u_1, u_2, u' , которые лежатъ соотвѣтственно въ интервалахъ

$$(-1, u_0), (u_0, +1), (+1, +\infty).$$

Мы можемъ поэтому написать:

$$f(u) = a(u - u_1)(u_2 - u)(u' - u);$$

послѣдній множитель будетъ существенно положительнымъ, потому что переменная u , какъ косинусъ, содержится между -1 и $+1$; для того, чтобы функція $f(u)$ оставалась положительной, необходимо, чтобы переменная u , начальное значеніе которой u_0 содержится между u_1 и u_2 , оставалась въ интервалѣ u_1, u_2 . Отсюда слѣдуетъ, что уголь θ колеблется между предѣльными углами θ_1, θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$), косинусы которыхъ равны u_1 и u_2 . При возрастаніи u отъ значенія u_1 до значенія u_2 , нужно взять

$$\frac{du}{dt} = + \sqrt{f(u)},$$

когда же u уменьшается отъ значенія u_2 до u_1 , нужно взять знакъ $-$.

Уравненіе (7) показываетъ, что производная $\frac{d\psi}{dt}$ измѣняетъ знакъ при $u = \frac{\beta}{br_0}$. Слѣдовательно, если $\beta^2 > b^2 r_0^2$, то уголь ψ либо только убываетъ, либо же только возрастаетъ, потому что переменная u , какъ косинусъ, не можетъ быть равна $\frac{\beta}{br_0}$.

Если $\beta^2 < b^2 r_0^2$, то переменная u не можетъ получить значеніе $\frac{\beta}{br_0}$, не обращая при этомъ полинома $f(u)$ въ положительное число ⁵⁾. А такъ какъ

$$f\left(\frac{\beta}{br_0}\right) = \left(a - \frac{a\beta}{br_0}\right) \left(1 - \frac{\beta^2}{b^2 r_0^2}\right),$$

то условіе $f\left(\frac{\beta}{br_0}\right) > 0$ влечетъ за собой неравенство $a > \frac{a\beta}{br_0}$.

Въ случаѣ, когда одновременно имѣютъ мѣсто неравенства

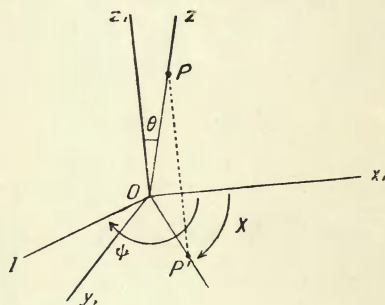
$$\beta^2 < b^2 r_0^2, \quad a > \frac{a\beta}{br_0},$$

уголь ψ измѣняется, то увеличиваясь, то уменьшаясь. Измѣненіе угла ψ опредѣляетъ собою прецессионное движеніе.

Такъ какъ уголъ θ колеблется между предѣлами θ_1 и θ_2 , то ось Oz описываетъ конусъ, заключенный между двумя конусами вращенія, которые имѣютъ общую ось Oz_1 и углы при вершинѣ, соответственно равные $2\theta_1$ и $2\theta_2$. Это и есть такъ называемое нутаціонное движеніе. Вообще говоря, предѣльные конусы касаются конуса, который служить геометрическимъ мѣстомъ оси Oz . Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ точку P , лежащую на оси Oz на разстояніи единицы отъ точки O ; ея проекція P' (фиг. 156) на плоскость x_1Oy_1 имѣетъ полярныя координаты

$$\varrho = \sin \theta, \quad \chi = \psi - \frac{\pi}{2},$$

такъ какъ $P'OI = \frac{\pi}{2}$ ⁶⁾. Касательная къ геометрическому мѣсту этой



Фиг. 156.

проекціи составляетъ съ радіусомъ-векторомъ уголъ V , опредѣляемый формулой

$$\operatorname{tang} V = \frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\chi}} = \frac{d\chi}{dt} : \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt}.$$

Кромѣ того,

$$\varrho = \sin \theta = \sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{u}{1 - u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{u}{1 - u^2} \sqrt{f(u)},$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0 u}{1 - u^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\operatorname{tang} V = \frac{br_0 u}{u \sqrt{f(u)}}.$$

Итакъ, при $u=u_1$ и $u=u_2$ $\text{tang } V$ обращается въ бесконечность, что и требовалось доказать ⁷⁾. Однако, если значеніе u_1 или u_2 обращаетъ въ нуль числителя въ выраженіи $\text{tang } V$, то наше доказательство теряетъ силу; въ этомъ случаѣ, при разсматриваемомъ значеніи перемѣнной u , имѣетъ мѣсто равенство $\text{tang } V=0$, и конусъ, который служить геометрическимъ мѣстомъ оси Oz , нормаленъ къ соотвѣтствующему предѣльному конусу.

239. Частный случай. Предположимъ, что начальное вращеніе совершается вокругъ оси Oz , т. е. что

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0.$$

Уравненія (5) даютъ

$$\alpha = \alpha u_0, \quad \beta = b r_0 u_0, \quad (u_0 = \cos \theta_0),$$

и уравненіе (9) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (u_0 - u) [\alpha (1 - u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)].$$

Одинъ изъ тѣхъ корней, которые мы выше обозначили черезъ u_1 и u_2 , теперь равенъ u_0 . Для того, чтобы величина $\left(\frac{du}{dt} \right)^2$ оставалась положительной, перемѣнная u должна колебаться между значеніемъ u_0 и предѣломъ, который мы назовемъ u_1 и который долженъ обращать въ нуль количество, заключенное въ квадратныя скобки. Этотъ предѣлъ u_1 опредѣляется уравненіемъ

$$\alpha (1 - u_1^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u_1) = 0,$$

изъ котораго мы найдемъ, что

$$u_0 - u_1 = \frac{\alpha (1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2}.$$

Ясно, что $u_0 - u_1 > 0$; второй предѣлъ меньше перваго, и предѣльный конусъ, соотвѣтствующій корню u_1 , будетъ наружнымъ по отношенію къ конусу, который соотвѣтствуетъ корню u_0 . Такъ какъ значеніе u_0 обращаетъ въ нуль выраженіе $\beta - b r_0 u$, то конусъ, служащій геометрическимъ мѣстомъ оси Oz , будетъ, согласно тому, что мы видѣли выше, нормаленъ къ предѣльному конусу, который соотвѣтствуетъ значенію u_0 . Выраженіе производной $\frac{d\psi}{dt}$ здѣсь обращается въ

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{b r_0 (u_0 - u)}{1 - u^2},$$

и мы видимъ, что производная $\frac{d\psi}{dt}$ все время сохраняетъ знакъ количества r_0 ; отсюда вытекаетъ, что вращеніе плоскости z_1Oz вокругъ оси Oz_1 совершается все время въ ту же сторону, въ которую совершается начальное вращеніе тѣла вокругъ оси Oz .

Такое именно движеніе получить волчокъ, вращающійся вокругъ своего острія, предполагаемаго неподвижнымъ, если сообщить волчку начальное вращеніе вокругъ его оси.

Разсмотримъ болѣе частный случай, когда начальное вращеніе r_0 очень велико. Равенство

$$u_0 - u_1 = \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2}$$

показываетъ, что значеніе u_0 мало отличается отъ u_1 ; конусъ, который служить геометрическимъ мѣстомъ оси Oz , будетъ заключенъ, слѣдовательно, между двумя очень близкими другъ къ другу конусами вращенія; кромѣ того, вращеніе плоскости z_1Oz будетъ происходить очень медленно. Дѣйствительно,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{br_0(u_0 - u)}{1 - u^2};$$

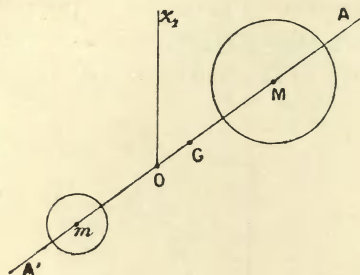
кромѣ того, разность $u_0 - u_1$ имѣетъ постоянно значеніе, меньшее, чѣмъ разность $u_0 - u_1$, которая равна $\frac{a(1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2}$; отсюда слѣдуетъ, что постоянно имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left| \frac{d\psi}{dt} \right| < \left| \frac{a(1 - u_1^2)}{br_0(1 - u^2)} \right|;$$

а такъ какъ множитель $\frac{1 - u_1^2}{1 - u^2}$ очень мало отличается отъ единицы, то $\frac{d\psi}{dt}$ сохраняетъ очень малое значеніе порядка $\frac{1}{r_0}$. Такимъ образомъ, если будемъ очень быстро вращать тѣло вокругъ оси Oz и затѣмъ предоставимъ его самому себѣ, то оно, повидимому, будетъ продолжать вращаться вокругъ этой оси, а послѣдняя сама будетъ казаться вращающейся очень медленно вокругъ оси Oz_1 , при чемъ оба эти вращенія совершаются либо въ положительную сторону, либо въ отрицательную сторону вокругъ соотвѣтственныхъ осей.

Эти свойства находятъ примѣненіе въ гироскопическихъ вѣсахъ. Приборъ этотъ состоитъ изъ двухъ тяжелыхъ шаровъ M

и m (фиг. 157), насаженныхъ на одинъ стержень AOA' , который вращается вокругъ точки O . Передвигая массу m вдоль стержня, мы можемъ перемѣстить центръ тяжести G системы на ту или другую изъ полупрямыхъ OA или OA' . Если мы приведемъ систему въ быстрое вращеніе въ положительную сторону вокругъ оси OA , и затѣмъ предоставимъ систему самой себѣ, то увидимъ, что ось OA вращается вокругъ вертикальной оси, направленной вверхъ, и при-



Фиг. 157.

томъ въ положительную сторону, если центръ тяжести лежитъ на полупрямой OA , и въ отрицательную, — если центръ тяжести находится на полупрямой OA' . Въ частномъ случаѣ, когда центръ тяжести совпадаетъ съ точкой O , вращеніе продолжается безпредѣльно вокругъ оси OA , которая остается въ покоѣ. Дѣйствительно, эта ось является тогда перманентной осью вращенія.

VII. — ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНАГО ТѢЛА. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ.

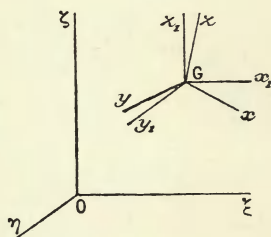
240. Свободное твердое тѣло. — Разсмотримъ свободное твердое тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ силъ. Его движеніе намъ будетъ извѣстно, если мы будемъ знать движеніе одной точки тѣла, напримѣръ, его центра тяжести, и движеніе тѣла вокругъ этой точки.

Вообразимъ три неподвижныя оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ (фиг. 158) и назовемъ черезъ ξ , η , ζ координаты центра тяжести G относительно этихъ осей. Уравненіями движенія центра тяжести, въ которыхъ M обозначаетъ массу тѣла, будутъ уравненія

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X, \quad M \frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y, \quad M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z, \quad (1)$$

при чемъ правыя части суть суммы проекцій на оси $O\xi\eta\zeta$ силъ, приложенныхъ къ тѣлу.

Проведемъ теперь черезъ центръ тяжести G три оси $Gx_1y_1z_1$, параллельныя неподвижнымъ осямъ $O\xi\eta\zeta$. Движеніе тѣла относительно осей $Gx_1y_1z_1$ представляетъ собою движеніе твердаго тѣла около неподвижной точки. Если мы будемъ разсматривать три оси $Gxyz$, неизмѣнно связанныя съ тѣломъ, то положеніе тѣла вокругъ центра тяжести G будетъ опредѣляться тремя Эйлеровыми углами θ, φ, ψ осей $Gxyz$ съ осями $Gx_1y_1z_1$. Мы получили уравненія движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, примѣняя теоре-



Фиг. 158.

му о моментахъ количествъ движенія. Но эта теорема примѣнима къ относительному движенію около центра тяжести (п. 218); мы можемъ поэтому примѣнить къ этому движенію уравненія, установленныя нами выше для движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Примѣнимъ, въ частности, уравненія Эйлера. Въ качествѣ осей $Gxyz$, связанныхъ съ тѣломъ, возьмемъ главные оси инерціи, соотвѣтствующія точкѣ G , и сохранимъ обозначенія предыдущей главы. Напишемъ уравненія Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= L, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= M, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= N. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы знаемъ, кромѣ того, какъ величины p, q, r выражаются черезъ $\theta, \varphi, \psi, \theta', \varphi', \psi'$. Шесть уравненій второго порядка (1) и (2) опре-

дѣляютъ шесть параметровъ $\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi$ въ функции отъ t и отъ 12 постоянныхъ. Въ общемъ случаѣ правая части этихъ уравненій будутъ зависѣть отъ шести параметровъ, а также отъ ихъ первыхъ производныхъ, если силы зависятъ отъ скоростей; мы должны будемъ, слѣдовательно, разсматривать вообще шесть совокупныхъ уравненій.

241. Примѣръ. Тяжелое твердое тѣло въ пустотѣ. —

Если единственными силами, дѣйствующими на тѣло, являются вѣса его молекулъ, то мы можемъ интегрировать отдѣльно уравненія (1), а потомъ уравненія (2).

Уравненія (1) зависятъ только отъ координатъ ξ, η, ζ ; они представляютъ собой уравненія движенія тяжелой точки въ пустотѣ. Центръ тяжести описываетъ, слѣдовательно, параболу подобно тяжелой точкѣ. Далѣе, такъ какъ внѣшнія силы, т. е. вѣса, даютъ лишь результирующую, приложенную къ центру тяжести, то количества L, M, N суть нули. Движеніе тѣла вокругъ точки G тождественно, слѣдовательно, съ тѣмъ движеніемъ твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки, которое тѣло имѣетъ, когда силы даютъ лишь результирующую, проходящую черезъ эту точку: это есть движеніе à la Poinsot.

242. Движеніе системы твердыхъ тѣлъ. —

Когда мы имѣемъ дѣло съ совокупностью нѣсколькихъ твердыхъ тѣлъ, то ихъ взаимодействія суть внутреннія силы системы. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ выгоднѣе разсматривать одно изъ тѣлъ, какъ изолированное. Тогда всѣ силы, непосредственно приложенныя къ этому тѣлу, и дѣйствія остальныхъ тѣлъ системы на него мы должны разсматривать, какъ силы, внѣшнія по отношенію къ этому тѣлу.

ГЛАВА XI.

Т Р Е Н І Е.

I. — ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

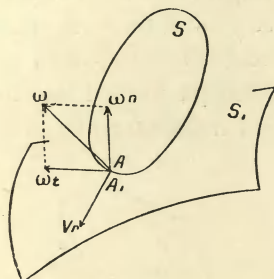
243. Общія замѣчанія.— До сихъ поръ мы рассматривали твердыя тѣла, какъ совершенно неизмѣняемыя и идеально полированные; мы допускали, что въ случаѣ, когда два тѣла, оставаясь въ покоѣ или двигаясь, касаются другъ друга въ одной точкѣ и могутъ скользить одно по другому, ихъ взаимодѣйствіе нормально къ ихъ общей касательной плоскости въ этой точкѣ.

Эта гипотеза противорѣчитъ опыту: въ природѣ твердыя тѣла не бываютъ ни совершенно неизмѣняемыми, ни совершенно гладкими. Когда два тѣла касаются въ дѣйствительности другъ друга, то касаніе никогда не происходитъ въ одной лишь точкѣ: оба тѣла испытываютъ вообще очень малыя деформации, вслѣдствіе которыхъ они приходятъ въ соприкосновеніе по нѣкоторой малой площадкѣ. Мы можемъ при вычисленіи принять эти явленія въ расчетъ, предположивъ, что къ нормальной реакціи присоединяются тангенціальная сила и пары, которыя будутъ опредѣлены ниже.

244. Скольженіе, каченіе и верченіе подвижной поверхности на неподвижной.— Вообразимъ твердое тѣло S , которое должно касаться тѣла S_1 (фиг. 159). Въ каждый моментъ t нѣкоторая матеріальная точка A подвижной поверхности S касается точки A_1 поверхности S_1 .

Разсмотримъ движеніе поверхности S относительно поверхности S_1 . Если въ моментъ t относительная скорость V_r матеріальной точки A отлична отъ нуля, то эта скорость лежитъ на общей касатель-

ной плоскости обѣихъ поверхностей, проведенной въ точкѣ ихъ касанія (п. 53). При этихъ условіяхъ скорости различныхъ точекъ тѣла S относительно тѣла S_1 , если разсматривать его, какъ неподвижное, будутъ въ моментъ t таковы, какъ если бы тѣло S обладало: 1° поступательной скоростью, которая тождественна съ относительной скоростью V_r точки A и лежитъ въ общей касательной плоскости поверхностей обоихъ тѣлъ, проходящей черезъ точку A , и



Фиг. 159.

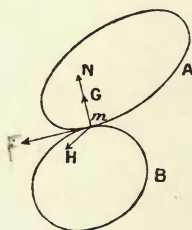
2° вращеніемъ ω вокругъ оси, проходящей черезъ точку A ; это вращеніе можно разложить на два другихъ: одно ω_t , лежащее въ общей касательной плоскости, и другое ω_n , нормальное къ этой плоскости. Скорость V_r называется скольженіемъ, вращеніе ω_t — каченіемъ, а вращеніе ω_n — верченіемъ. Когда мгновенное вращеніе ω есть нуль, то движеніе поверхности S относительно поверхности S_1 называется собственно скольженіемъ; если относительная скорость V_r матеріальной точки A равна нулю, то скольженіе не имѣетъ мѣста, и движеніе поверхности S относительно S_1 будетъ каченіемъ и верченіемъ. Вообще же, слѣдовательно, имѣютъ мѣсто одновременно скольженіе, каченіе и верченіе.

245. Трение. — Когда два твердыхъ подвижныхъ тѣла S и S_1 касаются, надавливая одно на другое, то, какъ мы уже объяснили, эти два тѣла, съ точки зрѣнія динамики, деформируются и приходятъ въ соприкосновеніе по очень малой площадкѣ, въ каждой точкѣ которой они дѣйствуютъ другъ на друга. Согласно теоремамъ о приведеніи системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, совокупность дѣйствій, производимыхъ такимъ образомъ однимъ тѣломъ на другое, можетъ быть приведена къ одной силѣ, приложенной въ

произвольной точкѣ, и парѣ. Такъ какъ тѣла соприкасаются по очень малой площадкѣ, то мы можемъ, съ точки зрѣнія геометріи, принять, что они касаются въ одной точкѣ m , которую мы назовемъ геометрической точкой соприкосновенія (фиг. 160). Такимъ образомъ, дѣйствія тѣла S_1 на тѣло S могутъ быть приведены къ слѣдующимъ элементамъ:

1° силѣ N , приложенной къ тѣлу S въ геометрической точкѣ соприкосновенія m и направленной нормально къ соприкасающимся поверхностямъ; эта сила есть нормальная реакція, противоудѣствующая взаимному проникновенію тѣлъ другъ въ друга;

2° силѣ F , приложенной къ той же точкѣ m и лежащей въ касательной плоскости къ поверхностямъ въ геометрической точкѣ



Фиг. 160.

ихъ соприкосновенія; эта сила называется треніемъ скольженія и противоудѣствуетъ скольженію;

3° парѣ G , ось которой нормальна къ соприкасающимся поверхностямъ; эта пара есть треніе верченія, противоудѣствующее верченію; наконецъ,

4° парѣ H , ось которой, лежащая въ общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей, направлена по тангенціальной составляющей ω_t мгновеннаго вращенія; эта пара есть треніе каченія, противоудѣствующее каченію.

Дѣйствія тѣла S на тѣло S_1 представляютъ собой силы и пары, которыя соотвѣтственно равны и противоположны предыдущимъ.

Мы предположили, что тѣла S и S_1 соприкасаются по очень малой площадкѣ, которую можно разсматривать, какъ точку. Въ нѣкоторыхъ вопросахъ два тѣла могутъ имѣть нѣсколько геометрическихъ точекъ соприкосновенія; въ такихъ случаяхъ мы должны

примѣнить предыдущія соображенія къ каждой геометрической точкѣ соприкосновенія.

Въ вопросахъ, которые мы разсматривали до сихъ поръ, мы пренебрегали силой F и парами G и H ; въ изученіи явленій это было лишь первымъ приближеніемъ.

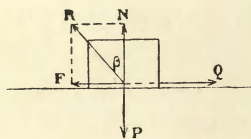
Во второмъ приближеніи мы будемъ пренебрегать парами G и H , которыя, вообще, очень малы въ сравненіи съ силами N и F . Мы сейчасъ разсмотримъ различные случаи, которые могутъ представиться при этихъ послѣдовательныхъ приближеніяхъ.

II. — ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНІЯ.

246. Трение скольженія. — Первые опыты относительно тренія при скольженіи были произведены Кулономъ въ 1781 г. и послѣ него генераломъ Мореномъ; однако, эти вопросы потребовали новой разработки. Простые законы, данные Кулономъ, не только не соотвѣтствуютъ физической реальности, но, какъ показалъ Пенлеве (Painlevé), могутъ даже привести къ логическимъ противорѣчіямъ („Leçons sur le frottement“, Paris, Hermann, 1895). Тѣмъ не менѣе мы здѣсь оставимъ въ силѣ законы Кулона и Морена въ качествѣ перваго приближенія.

Изучая трение скольженія, слѣдуетъ различать два случая: 1° трение въ состояніи покоя и, въ частности, начальное трение и 2° трение скольженія въ состояніи движенія.

247. Законъ тренія скольженія въ состояніи покоя. — Предположимъ, что на горизонтальный столъ поставлена тяжелая



Фиг. 161.

колода; система находится въ равновѣсіи, и, слѣдовательно, дѣйствія стола на колоду имѣютъ равнодѣйствующую N , нормальную къ столу, равную и прямопротивоположную вѣсу P тѣла (фиг. 161).

Приложимъ теперь къ тѣлу въ вертикальной плоскости, содержащей центръ тяжести, возможно ближе къ поверхности стола, горизонтальную силу Q , которую мы будемъ постепенно увеличивать, начиная отъ нуля. Когда эта сила Q очень мала, то тѣло, какъ показываетъ опытъ, не скользитъ: оно, а остается въ равновѣсіи. Необходимо, слѣдовательно, чтобы реакція R стола на тѣло была равна и прямопротивоположна равнодѣйствующей вѣса P и силы Q ; эта реакція можетъ быть разложена на двѣ составляющія: нормальную N , равную и прямопротивоположную вѣсу P , и тангенціальную F , равную и противоположную силѣ Q ; эта тангенціальная составляющая есть сила тренія. Уголъ β реакціи R съ нормалью N опредѣляется уравненіемъ:

$$\tan \beta = \frac{F}{N} = \frac{Q}{P}.$$

Если постепенно увеличивать силу Q , то, какъ показываетъ опытъ, въ моментъ, когда сила достигнетъ нѣкотораго напряженія Φ , тѣло приходитъ въ движеніе. Соотвѣтственное значеніе силы F , опредѣляемое равенствомъ $F = \Phi$, называется начальнымъ треніемъ; соотвѣтственное значеніе φ угла β , опредѣляемое равенствомъ

$$\tan \varphi = \frac{\Phi}{P},$$

называется угломъ тренія.

Можно также сказать, что скольженіе начинается лишь съ того момента, когда уголъ, составляемый нормалью съ равнодѣйствующей силъ P и Q , дѣйствию которыхъ мы подвергаемъ тѣло, превышаетъ уголъ φ .

Кулонъ измѣрилъ опытнымъ путемъ величины Φ и φ ; онъ нашелъ слѣдующіе законы:

1° начальное треніе не зависитъ отъ размѣровъ соприкасающихся поверхностей;

2° оно зависитъ отъ ихъ природы;

3° оно пропорціонально нормальной составляющей реакціи или, что сводится къ тому же, нормальной составляющей давления.

Постоянное отношеніе f начального тренія Φ къ нормальной реакціи N или къ нормальному давленію P называется коэффиціентомъ тренія:

$$\frac{\Phi}{N} = \frac{\Phi}{P} = f.$$

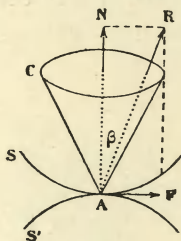
Уголъ тренія φ опредѣляется, слѣдовательно, формулой

$$\operatorname{tang} \varphi = f;$$

пока существуетъ равновѣсіе, уголъ β меньше угла φ .

248. Равновѣсіе натуральныхъ твердыхъ тѣлъ при наличности тренія. — Разсмотримъ тѣло S , опирающееся на другое тѣло S' , съ которымъ оно соприкасается по очень малой площадкѣ; послѣднюю мы будемъ разсматривать, какъ точку A (фиг. 162). Реакція R тѣла S' на тѣло S состоитъ изъ нормальной реакціи N и тангенціальной реакціи F , направленіе которой неизвѣстно и максимумъ которой равенъ fN ; уголъ β реакцій R и N , слѣдовательно, меньше угла тренія φ .

Для равновѣсія тѣла S необходимо, чтобы имѣло мѣсто рав-



Фиг. 162.

новѣсіе между силами, непосредственно приложенными къ тѣлу S , и реакціей R , другими словами, чтобы силы, приложенныя къ тѣлу, давали лишь равнодѣйствующую, равную и прямопротивоположную реакціи R , т. е.: во-первыхъ, проходящую черезъ точку A , во-вторыхъ, направленную такимъ образомъ, чтобы прижимать тѣло S къ S' , и, въ-третьихъ, составляющую съ нормалью острый уголъ, который меньше угла тренія.

Эти необходимыя условія также и достаточны; дѣйствительно, если они удовлетворяются, то мы можемъ предположить, что равнодѣйствующая непосредственно приложенныхъ силъ перенесена въ точку A , и разложить ее на двѣ силы, нормальную P и тангенціальную Q , подѣйствіемъ которыхъ скольженіе не будетъ имѣть мѣста, потому что уголъ равнодѣйствующей съ нормалью меньше угла φ , вслѣдствіе чего

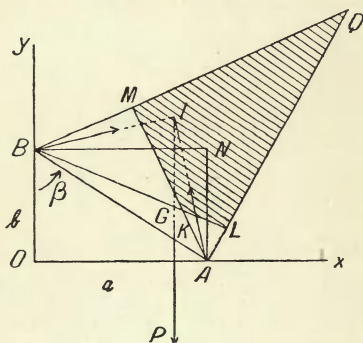
$$\frac{Q}{P} < f, \quad Q < Pf.$$

и тангенціальная составляющая меньше начального тренія.

Разсмотримъ конусъ вращенія C , образующая котораго AD составляетъ съ осью AN уголъ φ ; для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы силы имѣли равнодѣйствующую, которая проходила бы черезъ вершину A , прижимала тѣло S къ тѣлу S' и лежала въ конусѣ C .

Изъ предыдущаго разсужденія мы можемъ также вывести слѣдующее заключеніе: если сила, приложенная къ тѣлу S и проходящая черезъ точку A , прижимаетъ тѣло S къ тѣлу S' и образуетъ съ нормалью уголъ, меньшій угла φ , т. е. лежитъ внутри конуса C , то она всегда уничтожается реакціей S' , потому что мы можемъ разложить эту силу только-что указаннымъ образомъ.

249. Лѣстница. — Представимъ себѣ лѣстницу, опирающуюся на горизонтальное основаніе и приставленную къ вертикальной стѣ-



Фиг. 163.

нѣ. Предположимъ, что средняя линія лѣстницы лежитъ въ плоскости, которая перпендикулярна къ землѣ и къ стѣнѣ (фиг. 163), и которую мы примемъ за плоскость чертежа.

Назовемъ черезъ G центръ тяжести лѣстницы и человѣка, занимающаго на лѣстницѣ перемѣнное положеніе, и найдемъ условія равновѣсія, предполагая, что коэффиціенты тренія въ точкахъ A и B равны одному и тому же количеству f и, слѣдовательно, углы тренія имѣютъ оба одно и то же значеніе φ .

Пусть β будетъ уголъ лѣстницы съ стѣной. Такъ какъ вѣсъ и двѣ реакціи (а именно, реакція стѣны и реакція земли) должны

взаимно уравновѣшиваться, то эти три силы сходятся и расположены въ плоскости чертежа. Проведемъ черезъ точки A и B нормали AN и BN къ землѣ и къ стѣнѣ, и, кромѣ того, двѣ прямыя AKM и ALQ , составляющія уголъ φ съ нормалью AN , и двѣ прямыя BKL и BMQ , составляющія уголъ φ съ нормалью BN .

Эти четыре прямыя (слѣды на плоскости чертежа конусовъ, разсмотрѣнныхъ въ общемъ случаѣ) образуютъ четырехугольникъ $MQLK$. Такъ какъ углы, составляемые реакціями стѣны и земли съ нормальями, меньше угла φ , то точка пересѣченія реакцій лежитъ внутри четырехугольника $MQLK$; всѣхъ P , т. е. вертикальная прямая, проходящая черезъ точку G , должна пройти черезъ эту точку пересѣченія, а потому для равновѣсія необходимо, чтобы эта вертикальная прямая прошла черезъ площадь четырехугольника. Это условіе также достаточно; дѣйствительно, предположимъ, что вертикальная прямая точки G проходитъ черезъ эту площадь; взявъ на этой прямой точку I внутри четырехугольника, мы можемъ предположить, что всѣхъ P перенесенъ въ точку I , и разложить его на двѣ силы, направленные по прямымъ IA и IB ; эти силы уничтожаются реакціями земли и стѣны.

Прежде всего, если уголъ β лѣстницы со стѣной меньше угла тренія (на фигурѣ этого нѣтъ), то точка M и лѣстница находятся съ различныхъ сторонъ стѣны; вертикальная прямая, проведенная черезъ точку G , проходитъ, очевидно, черезъ общую часть двухъ конусовъ, и равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто при всякомъ положеніи человѣка на лѣстницѣ.

Предположимъ поэтому, что уголъ β больше, чѣмъ уголъ тренія, $\beta > \varphi$. Примемъ прямыя OA и OB за оси Ox и Oy и обозначимъ разстоянія OA и OB соответственно черезъ a и b . Такъ какъ точка M , наиболѣе близкая къ стѣнѣ среди точекъ четырехугольника $LKMQ$, находится на пересѣченіи двухъ прямыхъ

$$BM \dots\dots\dots y - b = xf,$$

$$AM \dots\dots\dots y = -\frac{x-a}{f},$$

то ея абсцисса

$$x = \frac{a - bf}{1 + f^2}$$

имѣетъ положительное значеніе: дѣйствительно, дробь $\frac{a}{b}$, по предположенію, больше, чѣмъ f , потому что уголъ β больше угла φ .

Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы абсцисса ξ центра тяжести G была больше, чѣмъ x . Назовемъ черезъ m массу лѣстницы и черезъ m_1 массу человѣка, находящагося на лѣстницѣ на разстояніи x_1 отъ стѣны; напишемъ, что $\xi > x$:

$$\frac{m \frac{a}{2} + m_1 x_1}{m + m_1} > \frac{a - bf}{1 + f^2};$$

это неравенство можетъ дать намъ нижній предѣлъ абсциссы x_1 . Для того, чтобы лѣстница оставалась въ равновѣсіи при всякомъ положеніи человѣка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{m \frac{a}{2}}{m + m_1} > \frac{a - bf}{1 + f^2};$$

эта формула даетъ предѣльное положеніе угла β , тангенсъ котораго равенъ $\frac{a}{b}$.

250. Трѣніе скольженія во время движенія. — Въ случаѣ движенія трѣніе является вполне опредѣленнымъ.

Предположимъ, что движущееся твердое тѣло, ограниченное поверхностью S , касается твердаго тѣла S' въ точкѣ A ; если есть трѣніе, то реакція тѣла S' на S разлагается на двѣ силы: нормальную N , которая носитъ названіе нормальной реакціи, и тангенціальную F , которая представляетъ собой силу трѣнія. Сила трѣнія F подчинена слѣдующимъ тремъ законамъ:

1° сила трѣнія направлена противоположно скорости, которую точка, находящаяся въ A , имѣетъ относительно тѣла S' ;

2° она не зависитъ отъ величины этой скорости;

3° она пропорціональна нормальной реакціи $F = fN$. Этотъ коэффициентъ f есть коэффициентъ трѣнія тѣла S о тѣло S' ; онъ немного меньше коэффициента начального трѣнія.

Эти законы примѣнимы при томъ условіи, что скорость матеріальной точки A относительно тѣла S' отлична отъ нуля. Предположимъ, что эта скорость обращается въ нуль и остается равной нулю. Тогда могутъ представиться нѣсколько случаевъ.

1° Тѣло S остается въ покоѣ относительно тѣла S' ; реакція тѣла S' на S подчиняется тогда законамъ, относящимся къ трѣнію скольженія въ состояніи покоя.

2° Движеніе тѣла S относительно S' есть каченіе и верченіе; это общій случай. Въ этомъ случаѣ скольженіе уже не имѣетъ мѣста, и законы, относящіеся къ тренію скольженія, уже непримѣнимы. Допускаютъ, что можно примѣнить законы о треніи скольженія въ состояніи покоя, т. е. разсматривать реакцію тѣла S' на S , какъ состоящую изъ нормальной составляющей N и тангенціальной составляющей $F < fN$.

3° Въ видѣ исключенія можетъ случиться, что тѣло S оканчивается точкой m , которой оно скользитъ по тѣлу S' на подобіе волчка, скользящаго по плоскости. Въ этомъ случаѣ тѣло S все время касается тѣла S' въ одной и той же точкѣ m ; если при этомъ скорость точки m относительно тѣла S' обращается въ нуль, то примѣняютъ законы тренія въ состояніи покоя, и движеніе тѣла S относительно S' представить собой движеніе твердаго тѣла около неподвижной точки.

251. Возможные разрывы сплошности въ уравненіяхъ движенія. — 1° Пусть V_r будетъ скорость относительно тѣла S' матеріальной точки A тѣла S , въ которой происходитъ касаніе. Пока скорость V_r отлична отъ нуля, имѣетъ мѣсто скольженіе; если $V_r = 0$, то имѣетъ мѣсто каченіе и верченіе. Предположимъ, что въ начальный моментъ t_0 скорость V_r равна нулю; требуется узнать, будутъ ли въ моментъ $t > t_0$ тѣла скользить одно по другому или же катиться и вертѣться. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, мы предположимъ, что имѣетъ мѣсто каченіе и верченіе; тогда реакція будетъ состоять изъ нормальной реакціи N и тангенціальной силы $F < fN$, имѣющей неопредѣленное направленіе. Исходя изъ этихъ предположеній, мы составимъ уравненія задачи и вычислимъ нормальную реакцію N и тангенціальную реакцію F . Если значеніе, которое мы найдемъ для силы F , будетъ меньше, чѣмъ fN , то сдѣланное предположеніе соотвѣтствуетъ дѣйствительности, и движеніе тѣла S относительно S' есть каченіе и верченіе. Это движеніе будетъ продолжаться до того момента, когда значеніе F превыситъ fN ; начиная съ этого момента, будетъ имѣть мѣсто скольженіе, и мы должны будемъ измѣнить уравненія. Если же, напротивъ, значеніе, найденное для силы F , будетъ съ самаго начала больше, чѣмъ fN , то каченіе и верченіе безъ скольженія не могутъ имѣть мѣста; тогда уже съ самаго начала происходитъ скольженіе; въ этомъ случаѣ мы, составляя уравненія движенія, должны примѣнять законы о треніи

скольженія въ состояніи движенія. Это скольженіе будетъ продолжаться все время, пока уравненія (предполагая, что они проинтегрированы) будутъ давать для скорости V_r значеніе, отличное отъ нуля. Если же въ нѣкоторый моментъ t_1 выраженіе скорости V_r обратится въ нуль, то нужно будетъ узнать, будетъ ли скорость V_r съ этого момента оставаться равной нулю или нѣтъ. Тогда предъ нами снова та же задача, рѣшеніе которой мы только-что намѣтили.

2° Если тѣло S касается тѣла S' въ точкѣ m и если въ моментъ t_0 скорость V_r точки m относительно тѣла S' равна нулю, то нужно узнать, остается ли скорость V_r въ моментъ $t > t_0$ равной нулю или же становится отличной отъ нуля, т. е. остается ли точка m въ покоѣ относительно тѣла S' или нѣтъ. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, мы будемъ поступать, какъ въ предыдущемъ общемъ случаѣ: мы рассмотримъ послѣдовательно оба предположенія и увидимъ, какое изъ нихъ слѣдуетъ удержать.

3° слѣдуетъ отмѣтить еще одинъ видъ разрыва сплошности въ уравненіяхъ. Происходитъ ли скольженіе или каченіе, можетъ случиться, что въ нѣкоторый моментъ t алгебраическое выраженіе реакціи N , вначалѣ положительное, обращается въ нуль и затѣмъ становится отрицательнымъ. Въ этомъ случаѣ, если тѣла S и S' могутъ отдѣлиться другъ отъ друга, они разъединяются въ моментъ t . Если же эти два тѣла не могутъ разъединиться, то нормальная реакція измѣняетъ свое направленіе. Такъ какъ тогда $N < 0$ и сила тренія имѣетъ существенно положительное значеніе, то она должна быть равна $-fN$ въ случаѣ скольженія и должна быть меньше, чѣмъ $-fN$, въ случаѣ каченія.

Начиная съ момента t , нужно, слѣдовательно, измѣнить уравненія движенія, взявъ $-f$ вмѣсто f . Если бы мы не приняли этой предосторожности, то мы пришли бы къ нелѣпости; начиная съ момента t , уравненія выражали бы движеніе, въ которомъ тангенціальное дѣйствіе тѣла S' на S стремилось бы увеличивать скорость относительно S' точки тѣла S , въ которой касаются тѣла.

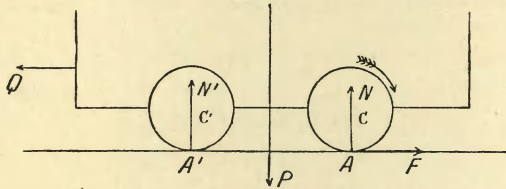
252. Примѣръ. — Въ видѣ приложенія разберемъ въ грубыхъ чертахъ, какъ локомотивъ тянетъ поѣздъ по рельсовому пути; для упрощенія мы схематизируемъ задачу.

Предположимъ, что локомотивъ имѣетъ двѣ пары колесъ; проектируемъ фигуру на вертикальную плоскость, параллельную пути, который мы предполагаемъ прямолинейнымъ и горизонтальнымъ. На чертежѣ предполагается, что поѣздъ движется слѣва направо (фиг. 164).

Вообразимъ сперва, что движущей является только первая пара колесъ C ; тогда давленіе пара стремится повернуть колеса C въ направленіи стрѣлки, треніе не даетъ имъ скользить по рельсамъ, и поѣздъ подвигается впередъ. Вторая пара колесъ C' здѣсь служитъ лишь для того, чтобы поддерживать локомотивъ. При этихъ условіяхъ главными внѣшними силами, приложенными къ локомотиву, будутъ слѣдующія (сопротивленія воздуха мы не принимаемъ во вниманіе):

1° вѣсъ P локомотива;

2° нормальная реакція N рельса на колесо C и обусловливаемая треніемъ тангенціальная реакція F , направленная противоположно скольже-



Фиг. 164.

нію, которое стремится возникнуть; такъ какъ въ данномъ случаѣ происходитъ каченіе, то здѣсь примѣняются законы о треніи скольженія въ покоѣ, и

$$F < fN; \quad (1)$$

3° нормальная реакція N' рельса на колесо C' ; такъ какъ это колесо служитъ единственно для поддерживанія, то въ его точкѣ касанія A' съ рельсомъ не возникаетъ сколько-нибудь замѣтной тангенціальной реакціи;

4° силы, равныя и параллельныя силамъ N , F , N' и приложенныя къ симметричнымъ колесамъ; наконецъ,

5° реакція Q поѣзда, которую онъ производитъ на тянущій его локомотивъ; эту силу мы будемъ считать горизонтальной.

Мы рассматриваемъ локомотивъ, какъ твердое тѣло, имѣющее равномерное и прямолинейное движеніе; поэтому приложенныя къ нему внѣшнія силы удовлетворяютъ шести уравненіямъ равновѣсія твердаго тѣла, что вытекаетъ изъ теоремъ о проекціяхъ и моментахъ количествъ движенія.

Напишемъ, что суммы проекціи силъ на вертикальную прямую и на горизонтальную прямую, параллельную пути, равны нулю:

$$\begin{cases} 2N + 2N' - P = 0, \\ 2F - Q = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для упрощенія допустимъ, что вѣсъ равномерно распределенъ между четырьмя колесами; тогда

$$N = N' = \frac{P}{4}, \quad Q = 2F,$$

и, такъ какъ, согласно неравенству (1), $F < fN$, то имѣемъ окончательно

$$Q < f \frac{P}{2}.$$

Поэтому сила Q , представляющая сопротивленіе, которое можетъ преодолѣть локомотивъ, при равномерномъ движеніи не превышаетъ произведенія изъ коэффициента тренія колесъ о рельсы на половину вѣса локомотива.

Сочлененныя колеса. — Теперь предположимъ, что колеса сочленены, т. е. что движущими будутъ обѣ пары колесъ, и паръ дѣйствуетъ одновременно на обѣ пары. Въ этомъ случаѣ въ точкѣ касанія A' второго колеса и въ симметричной точкѣ приложены силы F' , аналогичныя силѣ F , такъ что

$$F' < fN. \quad (3)$$

Тогда

$$2N + 2N' - P = 0,$$

$$2F + 2F' - Q = 0,$$

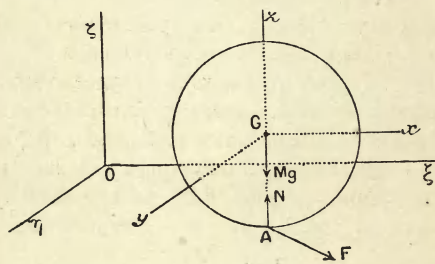
откуда выводимъ, согласно неравенствамъ (1) и (3),

$$Q < 2fN + 2fN',$$

$$Q < fP.$$

Верхній предѣлъ силы Q будетъ, слѣдовательно, вдвое больше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, и утилизируется весь вѣсъ локомотива.

253. Примѣръ. — Движеніе однороднаго тяжелаго шара по горизонтальной плоскости съ треніемъ (билліардный шаръ). — На горизонтальной плоскости, по которой движется шаръ, возьмемъ двѣ неподвижныя оси $O\xi$ и $O\eta$ и направимъ ось $O\xi$ вертикально вверхъ (фиг. 165)



Фиг. 165.

На шаръ, масса котораго пусть будетъ M , дѣйствуютъ двѣ силы: его вѣсъ Mg , приложенный къ центру тяжести G , и реакція плоскости, приложенная къ точкѣ касанія A ; эта послѣдняя сила даетъ вертикальную составляющую N и горизонтальную слагающую F , проекціи которой на оси $O\xi$ и $O\eta$ равны X и Y .

Уравнения движения центра тяжести G , совпадающего съ центромъ шара, будутъ, слѣдовательно:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = X, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = Y, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -Mg + N, \quad (1)$$

такъ какъ ζ есть величина постоянная, то послѣднее уравненіе даетъ:

$$N = Mg;$$

такимъ образомъ, нормальная составляющая реакціи постоянно равна вѣсу шара. Законы, относящіеся къ тренію скольженія, показываютъ тогда, что тангенціальная составляющая F имѣетъ постоянное напряженіе

$$F = fMg,$$

если предположить, что шаръ вначалѣ скользитъ по горизонтальной плоскости. Движеніе шара относительно осей $Gxyz$, параллельныхъ неподвижнымъ осямъ и имѣющихъ начало въ центрѣ тяжести G , есть движеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки; къ этому относительному движенію мы можемъ примѣнить теорему о моментахъ количествъ движенія (п. 218). Пусть ω будетъ мгновенная скорость вращенія шара въ моментъ t ; назовемъ черезъ p, q, r ея составляющія по тремъ осямъ $Gxyz$. Эти оси въ каждый моментъ служатъ главными осями инерціи шара для его центра тяжести G ; далѣе, моментъ инерціи шара одинаковъ для всѣхъ его діаметровъ. Обозначимъ этотъ моментъ инерціи черезъ Mk^2 . Проекціи на оси $Gxyz$ результирующаго момента около центра G относительныхъ количествъ движенія равны соотвѣтственно $Mk^2 p, Mk^2 q, Mk^2 r$. Моменты непосредственно приложенныхъ силъ около тѣхъ же осей равны

$$RY, -RX, 0,$$

гдѣ R есть радіусъ шара.

Примѣняя къ относительному движенію теорему о моментахъ количествъ движенія, мы найдемъ, слѣдовательно:

$$Mk^2 \frac{dp}{dt} = RY, \quad Mk^2 \frac{dq}{dt} = -RX, \quad Mk^2 \frac{dr}{dt} = 0. \quad (2)$$

Третье изъ уравненій (2) показываетъ, что вертикальная составляющая вращенія остается постоянной.

Примѣнимъ теперь второй законъ тренія (п. 245), а именно, выразимъ, что сила F направлена противоположно скорости той точки шара, которая совпадаетъ съ точкой касанія A . Абсолютная скорость этой точки есть геометрическая сумма ея переносной скорости $\left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \right)_c$ обусловленной движеніемъ осей $Gxyz$, и скорости V точки относительно этихъ осей:

$$V_x = -qR, \quad V_y = pR, \quad V_z = 0.$$

Поэтому, обозначивъ черезъ u , v проекціи искомой скорости на оси $O\xi$, $O\eta$, имѣемъ:

$$u = \frac{d\xi}{dt} - qR, \quad v = \frac{d\eta}{dt} + pR. \quad (3)$$

Проекціи скорости u , v соотвѣтственно пропорціональны проекціямъ силы X , Y :

$$\frac{u}{X} = \frac{v}{Y}. \quad (4)$$

Отсюда мы можемъ вывести, что скорость (u , v) матеріальной точки, совпадающей съ точкой A , имѣетъ неизмѣнное направленіе. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненія (3), получимъ:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - R \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + R \frac{dp}{dt};$$

подставивъ въ эти уравненія значенія производныхъ $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, выводимые изъ уравненій (1) и (2), получимъ

$$\frac{du}{dt} = \frac{X}{M} + \frac{R^2}{Mk^2} X, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{Y}{M} + \frac{R^2}{Mk^2} Y; \quad (5)$$

раздѣливъ первое уравненіе на второе, имѣемъ

$$\frac{du}{dv} = \frac{X}{Y},$$

откуда, въ силу уравненія (4),

$$\frac{du}{dv} = \frac{u}{v}, \quad \frac{du}{u} = \frac{dv}{v};$$

интегрируя, получимъ:

$$\frac{u}{v} = \text{const.}$$

Сила тренія оказывается, слѣдовательно, постоянной по величинѣ и направленію. Такъ какъ движеніе точки G обусловливается дѣйствіемъ одной лишь этой силы, то траекторія этой точки есть парабола.

Составляющія X , Y силы тренія постоянны, такъ что проекціи u , v скорости точки, которая совпадаетъ съ точкой A , выражаются, согласно уравненіямъ (5), линейными функціями времени. Эти количества u , v убываютъ по абсолютной величинѣ. Дѣйствительно, если предположить, напримеръ, что $u > 0$, то въ силу законовъ тренія составляющая X будетъ отрицательной; производная $\frac{du}{dt}$ также будетъ отрицательной, и составляющая u убываетъ. Такъ какъ она есть линейная функція времени, то черезъ конечный промежутокъ времени T она получитъ значеніе нуль. Если бы составляющая u была отрицательной, то составляющая X была бы положительной, и составляющая u стремилась бы къ нулю, возрастая. Такъ какъ отношеніе $\frac{u}{v}$ остается постояннымъ, то обѣ составляющія скорости обращаются

въ нуль въ одинъ и тотъ же моментъ T ; въ этотъ моментъ уже имѣеть мѣсто не скольженіе, но каченіе и верченіе.

Покажемъ теперь, что послѣ момента T каченіе и верченіе продолжаются безпредѣльно, и что, кромѣ того, движеніе центра тяжести становится прямолинейнымъ и равномернымъ. Дѣйствительно, если въ эту вторую фазу попрежнему будемъ называть черезъ X , Y проекціи силы F , то уравненія (1) и (2) сохраняютъ свою прежнюю форму. Исключивъ изъ этихъ уравненій X и Y , находимъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{k^2}{R} \frac{dq}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{k^2}{R} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (6)$$

Такъ какъ въ эту новую фазу имѣеть мѣсто каченіе и верченіе, то количества u и v будутъ нулями, и

$$\frac{d\xi}{dt} - qR = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} + pR = 0.$$

Опредѣливъ отсюда $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ и подставивъ въ уравненія (6), мы найдемъ, что

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0.$$

Итакъ, центръ G имѣеть прямолинейное и равномерное движеніе; кромѣ того, уравненія (1) показываютъ, что проекціи X , Y и, слѣдовательно, также сила F суть нули. Такимъ образомъ, $F < fN$, и каченіе вмѣстѣ съ верченіемъ продолжается безпредѣльно.

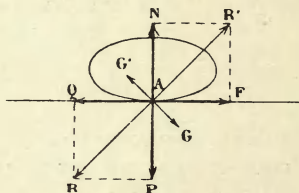
III. — ТРЕНІЕ КАЧЕНІЯ.

254. Законы относительно тренія каченія.— Въ предыдущихъ параграфахъ мы пренебрегали треніями каченія и верченія. Теперь мы разберемъ нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ мы примемъ въ расчетъ треніе каченія, оставивъ безъ вниманія треніе верченія.

Треніе каченія, начальное и во время движенія.— Въ п. 245 мы опредѣлили въ общемъ видѣ пары, выражающія сопротивленіе каченію и верченію.

Разсмотримъ простой случай цилиндра. Если цилиндръ можетъ катиться и скользить по плоскости, то деформация твердыхъ тѣлъ и вибрація молекулъ принимаются при вычисленіи въ расчетъ слѣдующимъ образомъ. Мы пренебрегаемъ размѣрами деформации и поступаемъ такъ, какъ если бы цилиндръ касался плоскости вдоль

образующей A (фиг. 166). Предположимъ, кромѣ того, что цилиндръ подвергается дѣйствию силъ, лежащихъ въ плоскости, которая перпендикулярна къ образующимъ и которая будетъ служить намъ плоскостью чертежа. Сдѣлавъ приведеніе этихъ силъ въ точкѣ A , мы получимъ результирующую силу AR , приложенную къ точкѣ цилиндра, совпадающей съ точкой A , и результирующую пару G , ось которой AG перпендикулярна къ плоскости чертежа. Разложимъ результирующую AR на двѣ силы: на составляющую AP , нормальную къ плоскости, на которой лежитъ цилиндръ, и составляющую AQ , параллельную этой плоскости. Сила Q стремится вызвать скольженіе цилиндра; пара G стремится повернуть его вокругъ образующей касанія, т. е. вызвать каченіе цилиндра по плоскости, такъ какъ при каченіи эта образующая служитъ мгновенной осью вращенія.



Фиг. 166.

Вообразимъ сначала, что пара G есть нуль; тогда можетъ происходить лишь скольженіе; для того, чтобы это скольженіе не имѣло мѣста, необходимо и достаточно, чтобы было

$$Q < Pf, \quad (1)$$

гдѣ f есть коэффициентъ тренія скольженія. Предположимъ, что это условіе удовлетворено, и присоединимъ пару AG , ось которой нормальна къ плоскости чертежа. Если бы каченіе не встрѣчало никакого сопротивленія, то, какъ бы ни была мала эта пара, она вызвала бы каченіе тѣла. Опытъ показываетъ, однако, что въ дѣйствительности каченіе не происходитъ, если моментъ G пары меньше нѣкотораго предѣльнаго значенія

$$G < P\delta, \quad (2)$$

гдѣ P обозначаетъ, какъ и выше, нормальную составляющую силы R , а δ есть линейный коэффициентъ, который называется коэффициентомъ тренія при каченіи. По Кулону и Морену

этотъ коэффициентъ δ не зависитъ отъ силы R и радиуса кривизны перпендикулярнаго сѣченія катящагося цилиндра, по крайней мѣрѣ, въ извѣстныхъ порядкахъ.

Такъ какъ коэффициентъ δ извѣстенъ, то мы видимъ, что условия равновѣсія цилиндра на плоскости даны двумя ^{уравне-}нiями (1) и (2): первое выражаетъ, что скольженіе не имѣетъ мѣста, второе — что нѣтъ каченія. Въ этомъ случаѣ плоскость развиваетъ реакцію, состоящую изъ силы R' , которая равна и противоположна силѣ R , и пары G' , которая равна и противоположна парѣ G . Это объясняется тѣмъ, что въ дѣйствительности соприкосновеніе происходитъ по конечной площадкѣ вокругъ точки A , такъ что, сдѣлавъ приведеніе реакцій плоскости въ точкѣ A , мы получимъ силу и пару. Эта пара G' есть пара тренія при каченіи.

Этотъ результатъ можно представить еще слѣдующимъ образомъ. Чтобы выразить существованіе равновѣсія, нужно написать, что силы, непосредственно приложенныя къ цилиндру (лежащія, согласно предположенію, въ плоскости перпендикулярнаго сѣченія), уравниваются нормальной силой N , которая равна и противоположна силѣ P , тангенціальной силой F , которая равна и противоположна силѣ Q , и парой, имѣющей моментъ G' и ось, параллельную образующимъ, при условіи существованія неравенствъ

$$F < Nf, \quad G' < N\delta.$$

Можетъ случиться, что условіе (1) удовлетворяется, а условіе (2) не удовлетворяется, или наоборотъ; въ первомъ случаѣ цилиндръ катится безъ скольженія, во второмъ — цилиндръ скользитъ безъ каченія. Если ни одно условіе не удовлетворяется, то одновременно имѣетъ мѣсто каченіе и скольженіе въ томъ смыслѣ, что элементарное перемѣщеніе твердаго тѣла будетъ геометрической суммой скольженія и вращенія вокругъ образующей касанія.

Когда цилиндръ находится въ движеніи, то въ случаѣ каченія предполагается, что реакція плоскости, противодействующая каченію, постоянно достигаетъ своего максимума, такъ что во время каченія пара, представляющая треніе каченія, постоянно равна произведенію $N\delta$, въ которомъ N есть нормальная составляющая реакцій плоскости; точно такъ же въ случаѣ скольженія тангенціальная составляющая F реакцій постоянно равна Nf (п. 250). Если же одновременно имѣютъ мѣсто каченіе и скольженіе, то мы должны ввести

одновременно оба трения; часто трение качения не принимается во внимание.

Итакъ, мы должны различать слѣдующіе случаи:

1° Равновѣсіе. — Въ случаѣ равновѣсія

$$F < fN, \quad G' < N\delta,$$

гдѣ f есть коэффициентъ трения при скольженіи и δ — коэффициентъ трения при каченіи.

2° Качение. — Если имѣть мѣсто качение безъ скольженія, то

$$F \leq fN, \quad G' = N\delta.$$

3° Скольжение. — Въ случаѣ скольженія безъ качения

$$F = fN.$$

Въ этомъ случаѣ естественно было бы принять, что

$$G' \leq N\delta;$$

но такъ какъ пара G' очень мала сравнительно съ треніемъ скольженія, то обыкновенно можно пренебречь ею и принять $G' = 0$.

4° Скольжение и качение. — Въ этомъ случаѣ

$$F = fN, \quad G' = N\delta;$$

очень часто пара G' не принимается въ расчетъ.

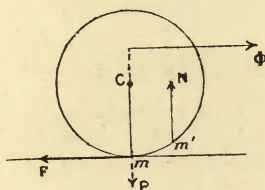
255. Качение. — Разсмотримъ подробнѣе случай качения. Здѣсь пара G' равна $N\delta$. Мы можемъ сложить эту пару съ нормальной реакціей N , приложенной къ геометрической точкѣ касанія m . Результирующая реакціи N и пары G' есть сила N' , которая равна и параллельна силѣ N , перенесенной впередъ на разстояніе δ ⁸⁾ (фиг. 167). Мы примемъ, слѣдовательно, въ расчетъ также и трение качения во время движенія, если допустимъ, что нормальная реакція земли (плоскости) приложена не къ геометрической точкѣ соприкосновенія m , но передъ этой точкой на разстояніи δ отъ нормали въ точкѣ m (фиг. 167). Тангенціальная реакція F всегда будетъ меньше, чѣмъ fN . Въ состояніи покоя $G' < N\delta$; въ этомъ случаѣ нормальная реакція перенесена впередъ на разстояніе ε , которое меньше δ .

Въ такой именно формѣ мы введемъ трение качения въ слѣдующемъ примѣрѣ.

256. Примѣръ. Каченіе однороднаго круговаго цилиндра по горизонтальной плоскости. — Предполагая, что цилиндръ находится въ состояніи покоя, найдемъ сперва, какую горизонтальную силу Φ нужно приложить къ цилиндру параллельно плоскости и перпендикулярно къ образующимъ, чтобы заставить цилиндръ катиться.

Пусть h будетъ разстояніе силы Φ отъ плоскости и P — вѣсъ цилиндра. Опредѣлимъ сперва силу Φ для случая равновѣсія. При такомъ предположеніи къ цилиндру приложены слѣдующія силы: сила Φ , вѣсъ P , нормальная реакція N , перенесенная впередъ въ точку m' , на разстояніе ε отъ нормали, меньшее, чѣмъ δ , и, наконецъ, тангенціальная реакція F , которая меньше, чѣмъ fN (фиг. 167).

Напишемъ, что суммы проекцій этихъ силъ на вертикальное



Фиг. 167.

и горизонтальное направленія равны нулю:

$$N = P, \quad F = \Phi.$$

Напишемъ далѣе, что сумма моментовъ этихъ силъ относительно геометрической точки касанія m равна нулю; замѣчая, что моменты силъ F и P равны нулю, имѣемъ:

$$\Phi h - N\varepsilon = 0.$$

Пользуясь неравенствами $F < fN$, $\varepsilon < \delta$, мы находимъ:

$$\Phi < Pf, \quad \Phi < \frac{P\delta}{h}. \quad (1)$$

Если эти два условія выполняются, то имѣетъ мѣсто равновѣсіе.

Если же не удовлетворены эти два условія или одно изъ нихъ, то равновѣсіе нарушается; это можетъ произойти различнымъ образомъ въ зависимости отъ того, какое именно условіе не удовлетворяется.

Предположимъ сперва, что

$$f > \frac{\delta}{h}, \quad h > \frac{\delta}{f};$$

тогда мы можемъ дать силѣ Φ такое значеніе, что

$$Pf > \Phi > \frac{P\delta}{h}.$$

Равновѣсіе нарушено, и происходитъ каченіе: дѣйствительно, такъ какъ сила Φ меньше, чѣмъ fP , т. е. чѣмъ начальное треніе скольженія, то скольженіе не можетъ имѣть мѣста.

Теперь предположимъ, напротивъ, что

$$f < \frac{\delta}{h}, \quad h < \frac{\delta}{f};$$

тогда мы можемъ принять, что

$$\frac{P\delta}{h} > \Phi > Pf;$$

въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто скольженіе.

Наконецъ, если сила Φ одновременно превышаетъ Pf и $\frac{P\delta}{h}$, то вначалѣ происходитъ мгновенное вращеніе и скольженіе.

ГЛАВА XII.

УДАРЫ.

1. — УДАРЫ, ПРИЛОЖЕННЫЕ КЪ МАТЕРІАЛЬНОЙ ТОЧКѢ.

257. Опредѣленія. — Иногда можетъ случиться, что точки матеріальной системы рѣзко измѣняютъ свои скорости за чрезвычайно короткое время, при чемъ положеніе системы почти не измѣняется. Напримѣръ, когда упругій мячъ, ударившись о стѣну, отскакиваетъ отъ нея, то за очень короткое время, въ теченіе котораго мячъ соприкасался со стѣной, его положеніе почти не измѣняется, но скорости его различныхъ точекъ претерпѣваютъ очень рѣзкое измѣненіе, такъ какъ мячъ, за моментъ до соприкосновенія направившійся къ стѣнѣ, сейчасъ же послѣ соприкосновенія удаляется отъ нея.

Въ случаяхъ подобнаго рода принято говорить, что движущаяся система получаетъ удары или толчки. Эти явленія можно подвести подъ общія теоремы механики, если предположить, что они обусловливаются безконечно большими силами, дѣйствующими въ теченіе безконечно короткаго времени. Мы разберемъ сначала случай одной только матеріальной точки.

258. Удары, приложенные къ матеріальной точкѢ. —

1° Одинъ ударъ. — Разсмотримъ матеріальную точку массы m , находящуюся подъ дѣйствіемъ силы F , проекціи которой равны X, Y, Z . Уравненія движенія точки:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \quad (1)$$

Какому бы закону ни была подчинена сила, мы можем рассматривать количества X, Y, Z во время движения, какъ функции времени t . Умноживъ объ части этихъ уравненій на dt и проинтегрировавъ ихъ между t_0 и t_1 , мы получимъ уравненія

$$\left(m \frac{dx}{dt} \right)_1 - \left(m \frac{dx}{dt} \right)_0 = \int_{t_0}^{t_1} X dt, \quad \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

гдѣ индексы 1 и 0 указываютъ, что значенія выражений въ скобкахъ взяты для моментовъ t_1 и t_0 .

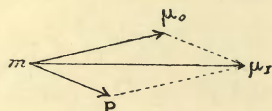
Предположимъ, что промежутокъ $t_1 - t_0$ очень малъ. Если сила X, Y, Z не имѣетъ въ теченіе этого промежутка очень большаго напряженія, то правыя части уравненій (2) весьма малы, и, слѣдовательно, скорость движущейся точки очень мало измѣняется въ теченіе промежутка $t_1 - t_0$. Такъ бываетъ при движеніи точки, подверженной обыкновеннымъ силамъ, напримѣръ, силѣ вѣса. Если же сила X, Y, Z въ теченіе очень короткаго промежутка $t_1 - t_0$ имѣетъ очень большое напряженіе порядка $\frac{1}{t_1 - t_0}$, то интегралы въ правыхъ частяхъ уравненій имѣютъ конечныя значенія, и, слѣдовательно, скорость точки испытываетъ конечное измѣненіе. Далѣе, если назовемъ черезъ V наибольшее значеніе скорости въ теченіе рассматриваемаго промежутка, то перемѣщеніе точки будетъ меньше, чѣмъ $V(t_1 - t_0)$; оно, слѣдовательно, очень мало. Въ видѣ перваго приближенія мы рассмотримъ идеальный случай, когда промежутокъ $t_1 - t_0$ бесконечно малъ, а сила въ теченіе этого промежутка имѣетъ бесконечно большое значеніе порядка $\frac{1}{t_1 - t_0}$. Въ такомъ случаѣ скорость точки рѣзко претерпѣваетъ конечное измѣненіе, при чемъ положеніе ея не измѣняется. Мы будемъ говорить въ такихъ случаяхъ, что точка получила ударъ, и будемъ представлять этотъ ударъ посредствомъ вектора P , который приложенъ въ точкѣ m и проекціями котораго служатъ три интеграла:

$$a = \int_{t_0}^{t_1} X dt, \quad b = \int_{t_0}^{t_1} Y dt, \quad c = \int_{t_0}^{t_1} Z dt.$$

Уравненія (2), выражающія измѣненіе скорости, теперь напишутся такъ:

$$\left. \begin{aligned} \left(m \frac{dx}{dt}\right)_1 - \left(m \frac{dx}{dt}\right)_0 &= a, \\ \left(m \frac{dy}{dt}\right)_1 - \left(m \frac{dy}{dt}\right)_0 &= b, \\ \left(m \frac{dz}{dt}\right)_1 - \left(m \frac{dz}{dt}\right)_0 &= c. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эти формулы даютъ физическую мѣру вектора-удара P , имѣющаго проекціи a, b, c ; онѣ показываютъ, дѣйствительно, что векторъ-ударъ равенъ геометрическому измѣненію количества движенія матеріальной точки, испытавшей ударъ. На фигурѣ 168 векторы μ_0



Фиг 168

и μ_1 представляютъ количества движенія точки m до и послѣ удара; векторъ P есть геометрическая разность векторовъ μ_1 и μ_0 .

2° Случай нѣсколькихъ ударовъ. — Пусть $F_1, F_2, \dots$ будутъ нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на одну и ту же точку и имѣющихъ соотвѣтственно проекціи (X', Y', Z') , $(X'', Y'', Z''), \dots$. Уравненія движенія будутъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X' + X'' \dots, \quad \dots, \quad \dots$$

Умноживъ обѣ части каждаго уравненія на dt , проинтегрировавъ между предѣлами t_0 и t_1 , и положивъ

$$\begin{aligned} a' &= \int_{t_0}^{t_1} X' dt, & b' &= \int_{t_0}^{t_1} Y' dt, & c' &= \int_{t_0}^{t_1} Z' dt, \\ a'' &= \int_{t_0}^{t_1} X'' dt, & b'' &= \int_{t_0}^{t_1} Y'' dt, & c'' &= \int_{t_0}^{t_1} Z'' dt, \\ &\dots\dots\dots & & & \end{aligned}$$

мы получимъ:

$$\left(m \frac{dx}{dt} \right)_1 - \left(m \frac{dx}{dt} \right)_0 = a' + a'' + \dots, \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (4)$$

Предположимъ, что промежутокъ $t_1 - t_0$ бесконечно малъ и что силы $F', F'', \dots$ въ теченіе этого промежутка имѣютъ бесконечно большія значенія порядка $\frac{1}{t_1 - t_0}$. Интегралы $a', a'', \dots$ имѣютъ конечныя значенія и опредѣляютъ, какъ мы только-что видѣли, удары $P', P'', \dots$. Уравненія (4) показываютъ, что измѣненіе количества движенія точки таково, какимъ оно было бы, если бы точка получила только одинъ ударъ P , проекціи котораго a, b, c опредѣляются уравненіями:

$$a = a' + a'' + \dots, \quad b = b' + b'' + \dots, \quad c = c' + c'' + \dots$$

Этотъ единственный ударъ P , который можетъ замѣнить собой разсматриваемые удары, равенъ, слѣдовательно, ихъ геометрической суммѣ. Такимъ образомъ, удары, приложенные къ одной точкѣ, складываются, какъ силы.

259. Дѣйствіе обыкновенныхъ силъ за время удара равно нулю. — Дѣйствительно, предположимъ, что точка находится подъ дѣйствіемъ нѣсколькихъ силъ $F', F'', \dots$, какъ въ предыдущемъ пунктѣ, но вообразимъ при этомъ, что сила F' остается конечной въ теченіе бесконечно малаго промежутка времени $t_1 - t_0$, тогда какъ остальные силы $F'', \dots$ получаютъ бесконечно большія значенія порядка $\frac{1}{t_1 - t_0}$. Тогда проекціи a', b', c' равны нулю, между тѣмъ какъ проекціи $a'', \dots$ имѣютъ значенія, отличныя отъ нуля. Члены a', b', c' , слѣдовательно, исчезнутъ изъ уравненій (4), и дѣйствіе обыкновенной силы F' въ теченіе интервала $t_1 - t_0$ сведется къ нулю.

260. Теоремы, относящіяся къ матеріальной точкѣ. —

Для сокращенія мы будемъ обозначать черезъ $\Delta \left(m \frac{dx}{dt} \right)$ количество

$$\left(m \frac{dx}{dt} \right)_1 - \left(m \frac{dx}{dt} \right)_0,$$

т. е. измѣненіе количества $m \frac{dx}{dt}$ за промежутокъ $t_1 - t_0$. Уравненія (4) теперь напишутся такъ:

$$\Delta \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \sum a, \quad \Delta \left(m \frac{dy}{dt} \right) = \sum b, \quad \Delta \left(m \frac{dz}{dt} \right) = \sum c. \quad (5)$$

Они выражаютъ слѣдующую теорему:

Измѣненіе проекціи количества движенія точки на нѣкоторую ось равно суммѣ проекцій ударовъ на эту ось.

Составивъ теперь изъ уравненій (5) выраженія моментовъ около оси Oz , мы найдемъ:

$$x \Delta \left(m \frac{dy}{dt} \right) - y \Delta \left(m \frac{dx}{dt} \right) = x \sum b - y \sum a.$$

Замѣчая, что координаты x, y въ теченіе удара остаются безъ измѣненій, мы можемъ написать это уравненіе въ видѣ

$$\Delta \left(x m \frac{dy}{dt} - y m \frac{dx}{dt} \right) = \sum (xb - ya)$$

и придти, такимъ образомъ, къ слѣдующей теоремѣ:

Измѣненіе момента количества движенія точки около оси равно суммѣ моментовъ ударовъ около этой оси.

II. — УДАРЫ, ПРИЛОЖЕННЫЕ КЪ СИСТЕМѢ.

261. Общія теоремы. — Слѣдуя методу, который привелъ насъ къ общимъ теоремамъ динамики системъ, мы можемъ посредствомъ предыдущихъ теоремъ вывести общія теоремы относительно ударовъ въ материальныхъ системахъ.

Мы будемъ разсматривать различныя точки системы, какъ свободныя, введя внутреннія и внѣшнія силы. При столкновеніяхъ нѣкоторые внутреннія или внѣшнія силы могутъ стать безконечно большими и вызывать удары. Удары, дѣйствующие на каждую точку $m(x, y, z)$ системы, мы раздѣлимъ на два класса. Къ первому мы отнесемъ внутренніе удары (a_i, b_i, c_i) , вызванные внутренними силами. Всѣ остальные удары составятъ второй классъ — классъ внѣшнихъ ударовъ (a_e, b_e, c_e) .

Теперь уравненія (5) примутъ слѣдующій видъ:

$$\Delta \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \sum a_i + \sum a_e,$$

$$\Delta \left(m \frac{dy}{dt} \right) = \sum b_i + \sum b_e,$$

$$\Delta \left(m \frac{dz}{dt} \right) = \sum c_i + \sum c_e.$$

Составимъ сумму изъ подобнаго рода уравненій, написанныхъ для всѣхъ точекъ системы; тогда уравненія относительно оси x -овъ дадутъ:

$$\sum \Delta \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum a_i + \sum \sum a_e.$$

Въ лѣвой части мы можемъ переставить символы Δ и $\sum$ одинъ на мѣсто другого и написать $\Delta \sum \left(m \frac{dx}{dt} \right)$; въ правой части членъ $\sum \sum a$ равенъ нулю, потому что внутренніе удары удовлетворяютъ закону равенства дѣйствія и противодѣйствія и, подобно вызывающимъ ихъ внутреннимъ силамъ, попарно равны и прямо противоположны. Имѣемъ, слѣдовательно, формулу

$$\Delta \sum \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum a_e,$$

которая выражаетъ слѣдующую теорему:

ТЕОРЕМА I. — Измѣненіе суммы проекцій количествъ движенія на ось равно суммѣ проекцій внѣшнихъ ударовъ на эту ось.

Введя въ разсмотрѣніе центръ тяжести, мы можемъ выразить эту теорему еще и другимъ способомъ. Назовемъ черезъ ξ , η , ζ координаты центра тяжести и черезъ M — массу всей системы; тогда

$$\sum m \frac{dx}{dt} = M \frac{d\xi}{dt}, \quad \dots,$$

слѣдовательно,

$$\Delta \left(M \frac{d\xi}{dt} \right) = \sum \sum a_e, \quad \dots$$

отсюда вытекаетъ

ТЕОРЕМА II. — Если предположимъ, что масса всей системы сосредоточена въ центрѣ тяжести, то измѣненіе его

количества движенія будетъ точно такое же, какъ если бы къ нему были непосредственно приложены всѣ внѣшніе удары.

Примѣнимъ теперь для одной точки системы теорему о моментахъ количествъ движенія, подраздѣляя попережнему удары на внутренніе и внѣшніе. Мы получимъ уравненіе:

$$\Delta \left[m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = \sum (xb_i - ya_i) + \sum (xb_e - ya_e).$$

Сложимъ его съ аналогичными уравненіями для всѣхъ точекъ системы и переставимъ символы Σ и Δ одинъ на мѣсто другого; замѣчая, что въ правой части внутренніе удары взаимно уничтожаются, мы получимъ уравненіе

$$\Delta \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum (xb_e - ya_e),$$

выражающее слѣдующую теорему.

Теорема III. — Измѣненіе суммы моментовъ количествъ движенія около оси равно суммѣ моментовъ внѣшнихъ ударовъ около этой оси.

262. Замѣчаніе. — При доказательствѣ предыдущихъ теоремъ мы предполагали, что оси неподвижны. Но такъ какъ, согласно предположенію, за бесконечно малое время, составляющее продолжительность удара, положеніе системы остается безъ измѣненія, то выведенныя теоремы примѣнимы также къ осямъ, связаннымъ съ однимъ изъ тѣлъ системы.

263. Прямой ударъ двухъ шаровъ. — Предположимъ, что два однородныхъ шара, имѣющіе соотвѣтственно массы m и m' , сталкиваются въ моментъ t_0 . Ударъ двухъ шаровъ называется прямымъ, если въ этотъ моментъ t_0 оба шара не вращаются, и, кромѣ того, скорости ихъ центровъ C и C' направлены вдоль линіи центровъ CC' . Эту прямую, которую мы можемъ разсматривать, какъ неподвижную въ продолженіе удара, мы примемъ за ось Ox ; назовемъ черезъ v_0 и v'_0 сообразованныя съ направленіемъ оси Ox алгебраическія значенія скоростей центровъ въ начальный моментъ удара t_0 и черезъ v_1 и v'_1 алгебраическія значенія скоростей центровъ въ

конечный моментъ удара t_1 . По принципу симметріи мы можемъ принять, что новыя скорости также направлены вдоль оси Ox .

Первое соотношеніе между скоростями въ моменты t_0 и t_1 даетъ намъ теорема о проекціяхъ количествъ движенія на ось Ox . Наши два шара составляютъ систему, для которой удары, происходящіе въ моментъ столкновенія, являются внутренними; измѣненіе суммы проекцій количествъ движенія на ось Ox равно, слѣдовательно, нулю, и потому

$$mv_1 + m'v'_1 = mv_0 + m'v'_0. \quad (1)$$

Это же самое уравненіе мы получили бы также, написавъ, что скорость V центра тяжести осталась безъ измѣненій:

$$V = \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} = \frac{mv_1 + m'v'_1}{m + m'}.$$

Чтобы окончательно опредѣлить скорости v_1 и v'_1 , мы должны сдѣлать нѣкоторые предположенія о природѣ обоихъ тѣлъ.

1° Случай совершенно неупругихъ тѣлъ. — Тѣла называются совершенно неупругими, если послѣ соударенія они остаются въ соприкосновеніи. Въ этомъ случаѣ

$$v_1 = v'_1,$$

и уравненіе (1) даетъ намъ

$$v_1 = v'_1 = \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'} = V. \quad (2)$$

На этомъ примѣрѣ можно провѣрить общую теорему о соудареніи неупругихъ тѣлъ, которую нашелъ Карно и доказательство которой мы дадимъ позже. Прежде всего, въ разсматриваемомъ случаѣ происходитъ потеря живой силы. Дѣйствительно, разность между значеніями живой силы до и послѣ удара равна

$$mv_0^2 + m'v'_0^2 - (m + m')v_1^2;$$

подставивъ сюда вмѣсто скорости v_1 ея значеніе изъ уравненія (2), мы найдемъ выраженіе

$$\frac{mm'}{m + m'}(v_0 - v'_0)^2, \quad (3)$$

т. е. положительное количество. Геометрическую разность между скоростями точки до и послѣ удара мы назовемъ потерянной ско-

ростью точки за время удара. Легко видѣть, что потерянная живая сила равна живой силѣ, которую имѣла бы система, если бы каждая изъ ея точекъ обладала скоростью, которую эта точка потеряла. Дѣйствительно, потерянная скорость каждой точки шара m выражается векторомъ $v_0 - v_1$, такъ какъ обѣ скорости направлены вдоль оси Ox ; точно такъ же потерянная скорость точки шара m' есть $v'_0 - v'_1$.

Слѣдовательно, живая сила, которая соотвѣтствовала бы потеряннѣмъ скоростямъ, равна

$$m(v_0 - v_1)^2 + m'(v'_0 - v'_1)^2.$$

Подставивъ сюда вмѣсто скорости v_1 ея значеніе изъ уравненія (2), мы получимъ выраженіе (3).

2° Случай, когда тѣла совершенно упруги. — Тѣла называются совершенно упругими, если живая сила системы имѣетъ одно и то же значеніе до и послѣ удара. Считая шары совершенно упругими, мы будемъ имѣть для опредѣленія скоростей v_1 и v'_1 два уравненія:

$$mv_1 + m'v'_1 = mv_0 + m'v'_0,$$

$$mv_1^2 + m'v'^2_1 = mv^2_0 + m'v'^2_0.$$

Чтобы рѣшить эту систему уравненій, мы представимъ ее такъ:

$$m(v_1 - v_0) = m'(v'_0 - v'_1),$$

$$m(v^2_1 - v^2_0) = m'(v'^2_0 - v'^2_1).$$

Раздѣливъ почленно второе уравненіе на первое, получимъ соотношеніе

$$v_1 + v_0 = v'_0 + v'_1$$

или

$$v_1 - v'_1 = v'_0 - v_0;$$

это соотношеніе выражаетъ, что относительная скорость двухъ шаровъ подѣйствию удара измѣняетъ знакъ, а не абсолютную величину.

Положивъ

$$v_1 = v'_0 + \alpha, \quad v'_1 = v^*_0 + \alpha,$$

мы тождественно удовлетворимъ предыдущему уравненію; подставивъ же эти значенія v_1 и v'_1 въ уравненіе проекцій количествъ дви-

женія, мы получимъ

$$\alpha = \frac{m - m'}{m + m'}(v_0 - v'_0);$$

отсюда мы непосредственно находимъ скорости v_1 и v'_1 .

Если оба шара имѣютъ одну и ту же массу ($m = m'$), то $\alpha = 0$, откуда

$$v_1 = v'_0, \quad v'_1 = v_0.$$

Въ этомъ случаѣ каждый шаръ послѣ удара имѣетъ скорость, которой обладалъ другой шаръ до удара; если оба шара совершенно одинаковы, то для невнимательнаго наблюдателя все происходитъ такъ, какъ будто шары прошли одинъ сквозь другой, не измѣнивъ своего движенія.

3° Промежуточный случай. — Когда тѣла совершенно неупруги, то въ результатѣ удара относительная скорость обоихъ тѣлъ обращается въ нуль; когда тѣла совершенно упруги, ударъ измѣняетъ лишь знакъ этой относительной скорости. Можно, по Ньютону, дать себѣ отчетъ въ томъ, что происходитъ въ случаѣ удара не вполнѣ упругихъ тѣлъ, допустивъ, что ударъ измѣняетъ знакъ относительной скорости и измѣняетъ ее въ данномъ отношеніи k . Тогда нужно положить

$$v_1 - v'_1 = k(v'_0 - v_0), \quad \text{гдѣ} \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ количествъ движенія даетъ скорости v_1 и v'_1 . Легко убѣдиться, что въ разсматриваемомъ случаѣ всегда происходитъ потеря живой силы и что эта потеря выражается количествомъ

$$(1 - k^2) \frac{mm'}{m + m'}(v_0 - v'_0)^2.$$

Если $k = 0$, то имѣемъ случай неупругихъ тѣлъ; если же $k = 1$, то мы имѣемъ случай совершенно упругихъ тѣлъ.

264. Удары, приложенные къ твердому тѣлу, вращающемуся вокругъ неподвижной оси. — Разсмотримъ твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси Oz , и предположимъ, что въ моментъ t_0 его подвергаютъ дѣйствию ударовъ $P_1, P_2, \dots, P_n$, которые считаются извѣстными. Тогда угловая скорость вращенія, имѣющая извѣстное значеніе ω_0 сразу измѣняется, получая новое значеніе ω_1 , которое требуется опредѣлить.

Назовемъ черезъ X, Y, Z суммы проекцій на оси данныхъ ударовъ $P_1, P_2, \dots, P_n$ и черезъ L, M, N суммы ихъ моментовъ около осей.

Какъ мы уже объяснили въ п. 223, можно представлять себѣ, что неподвижность оси Oz достигнута закрѣпленіемъ двухъ точекъ этой оси, начала O и другой точки O' , имѣющей координату h . Въ моментъ, когда дѣйствуютъ удары, реакціями точекъ O и O' порождаются удары P и P' связи, имѣющіе соотвѣтственно проекціи a, b, c и a', b', c' .

Примѣнимъ теорему о моментахъ количествъ движенія для оси Oz ; принимая во вниманіе, что сумма моментовъ количествъ движенія тѣла около оси Oz равна $Mk^2\omega$, и замѣчая, что удары P и P' пересѣкають ось Oz , мы найдемъ, что

$$Mk^2 A\omega = N; \quad (4)$$

это уравненіе и рѣшаетъ нашъ вопросъ, такъ какъ оно даетъ намъ разность $\omega_1 - \omega_0$.

Чтобы найти удары связи P и P' , мы примѣнимъ теорему о моментахъ къ осямъ Ox, Oy и теорему о проекціяхъ количествъ движенія на три оси; мы получимъ такимъ образомъ уравненія

$$\Delta \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = L - hb',$$

$$\Delta \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = M + ha',$$

$$\Delta \sum m \frac{dx}{dt} = X + a + a',$$

$$\Delta \sum m \frac{dy}{dt} = Y + b + b',$$

$$\Delta \sum m \frac{dz}{dt} = Z + c + c'.$$

Съ другой стороны, въ случаѣ вращенія вокругъ оси Oz съ угловою скоростью ω мы имѣемъ въ каждый моментъ

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Подставивъ въ предыдущія уравненія эти значенія производныхъ и замѣтивъ, что количества, подобные $\sum m xz$, какъ зависящіе исключительно отъ положенія системы, можно вынести за знакъ раз-

ности Δ , ибо тѣло не перемѣщается во время удара, мы найдемъ, что

$$\left. \begin{aligned} -(\Sigma m xz) \Delta\omega &= L - hb', \\ -(\Sigma m yz) \Delta\omega &= M + ha', \\ -(\Sigma m y) \Delta\omega &= X + a + a', \\ (\Sigma m x) \Delta\omega &= Y + b + b', \\ 0 &= Z + c + c'. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Такъ какъ разность $\Delta\omega$ извѣстна изъ уравненія (4), то полученными уравненіями опредѣляются количества a , b , a' , b' и $c + c'$; нахождение ударовъ связи сопряжено, слѣдовательно, съ неопредѣленностью, съ которой мы уже встрѣчались въ п. 113 и въ п. 223.

265. Случай одного только удара. Центръ удара. — Предположимъ, что происходитъ только одинъ ударъ P_1 (a_1 , b_1 , c_1), приложенный къ точкѣ (x_1 , y_1 , z_1), и рассмотримъ, нельзя ли распорядиться имъ такимъ образомъ, чтобы ось не испытывала никакого удара. Необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$a = b = c = a' = b' = c' = 0. \quad (6)$$

Послѣднее изъ уравненій (5), въ которомъ проекція Z сводится къ количеству c_1 , даетъ:

$$c_1 = 0.$$

Слѣдовательно, ударъ долженъ быть перпендикуляренъ къ оси вращенія. За плоскость xu -овъ примемъ плоскость, перпендикулярную къ оси, на которой расположенъ векторъ-ударъ, а перпендикуляръ къ послѣднему примемъ за ось Ox . Обозначая черезъ x_1 абсциссу точки A_1 , въ которой ударъ пересѣкаетъ ось Ox (фиг. 169), мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} X = a_1 = 0, \quad Y = b_1 = P_1, \quad Z = c_1 = 0, \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = x_1 P_1. \end{aligned}$$

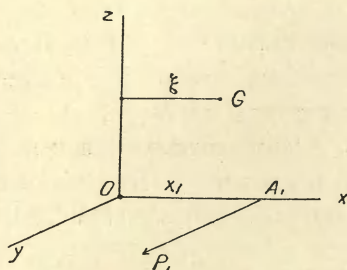
Въ силу этихъ предположеній, а также условій (6), уравненія (4) и (5) получаютъ слѣдующій видъ:

$$\Delta\omega = \frac{x_1 P_1}{M k^2}, \quad (7)$$

$$\Sigma m xz = 0, \quad \Sigma m yz = 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad (8)$$

$$\Sigma m x = \frac{M k^2}{x_1}. \quad (9)$$

Первые два уравнения группы (8) выражаютъ, что ось Oz есть одна изъ главныхъ осей инерціи для точки O ; третье же уравнение



Фиг. 169.

выражаетъ, что центръ тяжести долженъ лежать въ плоскости zOx ; далѣе, подставивъ въ уравненіе (9) вмѣсто количества $\sum mx$ его выраженіе $M\xi$ въ функціи абсциссы ξ центра тяжести G , мы найдемъ соотношеніе:

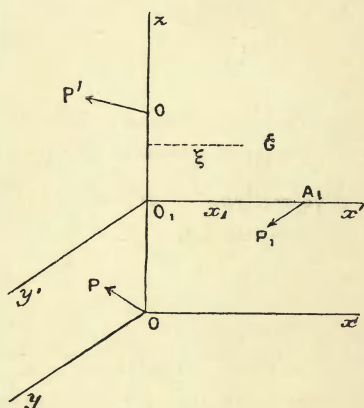
$$\xi = \frac{k^2}{x_1}.$$

Теперь сдѣлаемъ заключеніе.

Для того, чтобы къ тѣлу, вращающемуся вокругъ неподвижной оси, приложить ударъ такимъ образомъ, чтобы ось не испытала никакого удара, необходимо прежде всего, чтобы ось вращенія была главной осью инерціи для одной изъ своихъ точекъ O . Далѣе, ударъ, напряженіе котораго можетъ быть произвольнымъ, долженъ лежать въ плоскости, проведенной черезъ точку O перпендикулярно къ оси вращенія, и быть нормальнымъ къ плоскости, опредѣляемой центромъ тяжести G и осью вращенія. Наконецъ, ударъ долженъ пересѣкать эту послѣднюю плоскость въ точкѣ, расположенной съ той же стороны отъ оси вращенія, что и центръ тяжести на разстояніи отъ оси, равномъ $\frac{k^2}{\xi}$. Это послѣднее условіе можно выразить еще иначе слѣдующимъ образомъ: если ось Oz взята за ось привѣса твердаго тѣла, то ударъ долженъ быть приложенъ къ проекціи точки O на ось качанія, соответствующую оси привѣса Oz (п. 225).

Опредѣленная такимъ образомъ точка приложенія A_1 называется центромъ удара для оси Oz .

Случай пластинки. — Разсмотримъ случай, когда тѣло, имѣющее ничтожную толщину, т. е. бесконечно тонкая пластинка, должно вращаться вокругъ оси Oz , лежащей въ ея плоскости. Какова бы ни была эта ось, если только она не проходитъ черезъ центръ тяжести, мы можемъ опредѣлить ударъ, перпендикулярный къ плоскости пластинки, такимъ образомъ, чтобы ось вращения не претерпѣвала удара. Для этого достаточно, чтобы ось Oz была всегда главной осью для одной изъ своихъ точекъ. Дѣйствительно, принявъ плоскость пластинки за плоскость zx -овъ, перенесемъ оси $Oxyz$ въ точку O_1 оси Oz ($OO_1 = z_1$) въ положеніе $O_1x'y'z'$ (фиг. 170).



Фиг. 170.

Для того, чтобы ось Oz была главной осью инерціи для точки O_1 , необходимо, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\sum my'z' = 0, \quad \sum mx'z' = 0.$$

Первое изъ этихъ условій удовлетворяется всегда, потому что $y' = 0$ для всѣхъ точекъ пластинки. Такъ какъ

$$z = z' + z_1,$$

то второе условіе можно написать въ видѣ

$$\sum mx'(z - z_1) = 0$$

или

$$\sum mx'z - z_1 \sum mx' = 0,$$

откуда

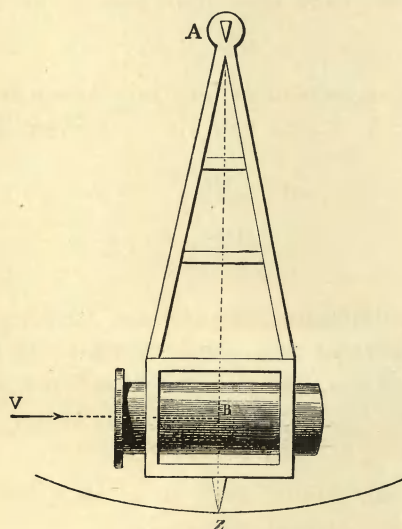
$$z_1 = \frac{\sum mx'z}{\sum mx'} = \frac{\sum mxz}{\sum mx}$$

Слѣдовательно, на оси Oz всегда существуетъ одна и только одна точка O_1 , для которой ось Oz является главной осью инерціи. Зная это, мы можемъ найти центръ удара на оси O_1x' ; его абсцисса x_1 опредѣляется равенствомъ

$$x_1 = \frac{k^2}{\xi} = \frac{Mk^2}{M\xi} = \frac{\sum mx'^2}{\sum mx'} = \frac{\sum mx^2}{\sum mx}.$$

Количества x_1 и z_1 суть координаты центра удара A_1 .

266. Балистическій маятникъ. — Этотъ аппаратъ служить для измѣренія скорости снарядовъ при выходѣ изъ жерла орудія. Онъ состоитъ изъ чугунаго пріемника, наполненнаго землей и



Фиг. 171.

скрѣпленнаго посредствомъ твердаго стержня съ горизонтальной осью A , вокругъ которой онъ можетъ вращаться (фиг. 171). Металлическій снарядъ, пущенный въ горизонтальномъ направленіи, проникаетъ въ землю, наполняющую пріемникъ, и застреваетъ въ ней въ точкѣ B ; мы предположимъ, что эта точка лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ ось и центръ тяжести G . Благодаря удару физическій маятникъ, состоящій изъ балистическаго маятника и металлическаго снаряда, отклоняется отъ вертикальной линіи; уголъ откло-

ненія θ опредѣляется посредствомъ измѣренія. Мы сейчасъ покажемъ, что изъ этого угла, такъ называемаго угла импульса, выводится скорость снаряда въ моментъ, когда онъ достигаетъ пріемника. Пусть m будетъ масса снаряда, v — его скорость, a — длина AB , l — разстояніе AG , Mk^2 — моментъ инерціи балистическаго маятника вокругъ оси A и, наконецъ, ω — угловая скорость, получаемая физическимъ маятникомъ.

Примѣнимъ теорему о моментахъ количествъ движенія физическаго маятника около оси A . До столкновенія моментъ количества движенія равенъ

$$mva,$$

такъ какъ только метательный снарядъ находится въ движеніи. Послѣ столкновенія сумма моментовъ количествъ движенія равна

$$Mk^2\omega + ma^2\omega.$$

Единственными внѣшними ударами являются тѣ, которые вызваны реакціями оси, а ихъ моменты суть нули. Имѣемъ, слѣдовательно:

$$mva = Mk^2\omega + ma^2\omega,$$

откуда

$$v = \frac{(Mk^2 + ma^2)\omega}{ma}. \quad (10)$$

Найдемъ соотношеніе, связывающее количества ω и θ ; оно дается теоремой живыхъ силъ. При переходѣ отъ вертикальнаго положенія къ направленію наибольшаго отклоненія живая сила получаетъ приращеніе

$$-(Mk^2 + ma^2)\omega^2.$$

Съ другой стороны, работа силъ, т. е. вѣса балистическаго маятника и метательнаго снаряда, равна

$$-(Mgl + mga)(1 - \cos \theta).$$

Теорема живыхъ силъ даетъ, слѣдовательно, соотношеніе:

$$(Mk^2 + ma^2)\omega^2 = 2(Mgl + mga)(1 - \cos \theta),$$

$$\omega = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{g(Ml + ma)}{Mk^2 + ma^2}}.$$

Подставивъ это значеніе угловой скорости ω въ уравненіе (10), мы найдемъ:

$$v = \frac{2}{ma} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{g(Ml + ma)(Mk^2 + ma^2)}. \quad (11)$$

Такимъ образомъ, если выпускать метательный снарядъ всегда на одномъ и томъ же разстояніи отъ оси, то скорость снаряда будетъ пропорціональна синусу половины угла импульса.

Найдемъ, въ какомъ случаѣ ось привѣса не испытываетъ никакого удара. Общія условія, найденныя нами въ предыдущемъ пунктѣ, показываютъ, что метательный снарядъ долженъ застрять въ точкѣ на вертикали, проходящей черезъ центръ тяжести, на разстояніи a отъ оси, опредѣляемомъ соотношеніемъ

$$al = k^2.$$

Если мы сдѣлаемъ это предположеніе (оно, очевидно, является наиболѣе благоприятнымъ для сохраненія аппарата), то предыдущая формула скорости послѣ замѣщенія k^2 величиной al даетъ слѣдующее выраженіе:

$$v = \frac{2(Ml + ma)}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

267. Твердое тѣло, вращающееся около неподвижной точки. — Разсмотримъ твердое тѣло, вращающееся около неподвижной точки O подѣ дѣйствіемъ обыкновенныхъ силъ. Предположимъ, что въ моментъ t_0 къ тѣлу приложены нѣкоторые удары $P_1, P_2, \dots, P_n$. Подѣ дѣйствіемъ этихъ ударовъ за бесконечно малое время $t_1 - t_0$ измѣнятся скорости различныхъ точекъ твердаго тѣла, положеніе же тѣла не измѣнится.

Внѣшними ударами будутъ данные удары $P_1, P_2, \dots, P_n$ и ударъ реакціи P неподвижной точки O . За оси $Oxyz$ примемъ главныя оси инерціи, соотвѣтствующія точкѣ O . Пусть A, B, C будутъ моменты инерціи тѣла вокругъ осей $Oxyz$; p_0, q_0, r_0 — составляющія мгновеннаго вращенія до удара; p_1, q_1, r_1 — составляющія этого вращенія послѣ удара и, наконецъ, L, M, N — суммы моментовъ данныхъ ударовъ. Такъ какъ ударъ P пересѣкаетъ оси $Oxyz$, то его моменты около этихъ осей равны нулю. Слѣдовательно, теорема о моментахъ количествъ движенія даетъ уравненія

$$A(p_1 - p_0) = L,$$

$$B(q_1 - q_0) = M,$$

$$C(r_1 - r_0) = N,$$

изъ которыхъ опредѣляются составляющія p_1, q_1, r_1 .

Если бы мы желали вычислить ударъ P , то достаточно было бы воспользоваться теоремой о проекціяхъ количествъ движенія.

268. Совершенно свободное твердое тѣло. — Представимъ себѣ свободное твердое тѣло, обладающее извѣстнымъ движеніемъ. Въ моментъ t_0 тѣло подвергаютъ дѣйствию ударовъ $P_1, P_2, \dots, P_n$. Требуется вычислить внезапныя измѣненія скоростей различныхъ точекъ тѣла.

Мы знаемъ, что распределеніе скоростей въ твердомъ тѣлѣ зависитъ исключительно отъ скорости центра тяжести и мгновеннаго вращенія около этой точки. Назовемъ черезъ ξ', η', ζ' составляющія скорости центра тяжести по тремъ неподвижнымъ осямъ $O\xi\eta\zeta$ и черезъ p, q, r — составляющія мгновеннаго вращенія ω по тремъ главнымъ осямъ инерціи тѣла $Gxyz$, для центра тяжести G ; отмѣтимъ индексами 0 и 1 значенія этихъ шести количествъ до и послѣ дѣйствія ударовъ; наконецъ, пусть X, Y, Z будутъ суммы проекцій данныхъ ударовъ на оси $O\xi\eta\zeta$, L, M, N — суммы моментовъ этихъ ударовъ около осей $Gxyz$, $\mathfrak{M}$ — масса всего тѣла. Теорема о проекціяхъ количествъ движенія для осей $O\xi\eta\zeta$ и теорема о моментахъ количествъ движенія для осей $Gxyz$ даютъ шесть уравненій:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\xi'_1 - \xi'_0) &= X, & \mathfrak{M}(\eta'_1 - \eta'_0) &= Y, & \mathfrak{M}(\zeta'_1 - \zeta'_0) &= Z, \\ A(p_1 - p_0) &= L, & B(q_1 - q_0) &= M, & G(r_1 - r_0) &= N, \end{aligned}$$

которыя и рѣшаютъ нашу задачу.

Замѣчаніе. — Мы видимъ, что задачи объ ударахъ приводятся къ рѣшенію алгебраическихъ уравненій, линейныхъ относительно неизвѣстныхъ, а не къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій, какъ это имѣетъ мѣсто въ задачахъ динамики.

269. Нѣсколько твердыхъ тѣлъ. — Мы можемъ разсматривать отдѣльно каждое твердое тѣло, вводя удары связи, обусловленные силами связи.

Если два тѣла взаимно касаются безъ тренія, то удары связи объ эти тѣла нормальны къ общей касательной плоскости, проведенной черезъ точку касанія; если же имѣется треніе, то каждый изъ этихъ ударовъ даетъ нормальную составляющую, обусловленную нормальной реакціей, и тангенціальную составляющую, обусловленную силой тренія.

ГЛАВА XIII.

НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХЪ РАБОТЪ.

270. Предварительныя замѣчанія. — Когда мы желаемъ при помощи изложенныхъ до сихъ поръ методовъ изучить какой-либо вопросъ о равновѣсіи или движеніи, то мы примѣняемъ всеобщія уравненія равновѣсія или движенія ко всей системѣ, а затѣмъ къ той или другой ея части. Мы получаемъ такимъ образомъ уравненія, въ которыхъ могутъ содержаться неизвѣстныя силы реакціи или связи; затѣмъ эти силы нужно исключить.

Если тренія нѣтъ, то можно непосредственно получить уравненія, независящія отъ силъ связи, при помощи общихъ методовъ, основанныхъ на принципѣ возможныхъ работъ.

Изложеніе этихъ методовъ и вытекающихъ изъ нихъ слѣдствій составляетъ предметъ аналитической механики.

Начало возможныхъ работъ, называемое еще иначе началомъ возможныхъ скоростей, составляетъ основаніе аналитической механики. Впервые имъ пользовался Галилей, но лишь Иванъ Бернулли указалъ въ письмѣ къ Вариньону въ 1717 г., что это начало имѣетъ всеобщее значеніе, и что при его помощи можно рѣшать задачи статики. Даламберъ въ 1743 г. показалъ, что составленіе уравненій задачи, относящейся къ динамикѣ, можетъ быть сведено къ составленію уравненій задачи изъ статики. Наконецъ, Лагранжъ въ своемъ знаменитомъ трудѣ („Mecanique analytique“, 1788) установилъ ученіе въ окончательномъ видѣ.

I. — ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

271. Возможное перемѣщеніе и возможная работа. —

Пусть M будетъ матеріальная точка, къ которой между прочими силами приложена сила F . Вообразимъ, что этой точкѣ дають произвольное безконечно малое перемѣщеніе MM' ; это перемѣщеніе мы назовемъ возможнымъ перемѣщеніемъ въ отличіе отъ дѣйствительнаго перемѣщенія, получаемого точкой подѣ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ ней. Элементарная работа силы F

$$F \cdot \overline{MM'} \cos(F, MM') \quad (1)$$

называется возможной работой силы F , соотвѣтствующей перемѣщенію MM' . Къ этой возможной работѣ можно примѣнить все, изложенное нами объ элементарной работѣ (глава III).

Если мы обозначимъ черезъ δt безконечно малый промежутокъ времени, въ теченіе котораго совершается возможное перемѣщеніе MM' , то векторъ $V = \frac{\overline{MM'}}{\delta t}$, направленный въ сторону MM' , называется возможной скоростью, сообщенной точкѣ M . Подставивъ въ выраженіе (1) $V \delta t$ вмѣсто $\overline{MM'}$ и замѣчая, что уголь, составляемый силой F со скоростью V , есть тотъ же, что и уголь между силой F и перемѣщеніемъ $\overline{MM'}$, мы можемъ написать выраженіе возможной работы такъ:

$$FV \cos(F, V) \delta t. \quad (2)$$

Выразимъ то же самое аналитически; если возьмемъ систему прямоугольныхъ осей и обозначимъ черезъ X, Y, Z проекціи силы F , а проекціи перемѣщенія MM' черезъ $\delta x, \delta y, \delta z$, то возможная работа будетъ

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z. \quad (3)$$

Выраженіе возможной работы обыкновенно берутъ въ видѣ (1), но когда примѣняютъ выраженіе (2) и когда дають возможныя перемѣщенія различнымъ точкамъ, то считаютъ, что количество δt имѣетъ одно и то же значеніе для всѣхъ этихъ точекъ.

272. Формулировка начала. — Вообразимъ систему точекъ, находящихся подѣ дѣйствіемъ связей безъ тренія. Силы, приложенныя къ различнымъ точкамъ, мы дѣлимъ на два класса: на силы

связи, имѣющія своимъ источникомъ связи, наложенныя на систему, и силы, непосредственно приложенныя, или заданныя, дѣйствию которыхъ мы подвергаемъ тѣло. Начало возможныхъ работъ формулируется тогда слѣдующимъ образомъ:

Для равновѣсія системы необходимо и достаточно, чтобы при всякомъ возможномъ ея перемѣщеніи, допускаемому связями, сумма возможныхъ работъ непосредственно приложенныхъ силъ была равна нулю.

Мы сперва проверимъ этотъ принципъ на нѣсколькихъ случаяхъ.

273. Свободная точка. — Разсмотримъ свободную матеріальную точку и назовемъ черезъ X , Y , Z равнодѣйствующую силу, непосредственно приложенныхъ къ этой точкѣ. Въ данномъ случаѣ всякое перемѣщеніе является возможнымъ, потому что здѣсь нѣтъ связей; возможная работа, соотвѣтствующая перемѣщенію δx , δy , δz , равна

$$\mathfrak{E} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Если точка находится въ равновѣсіи, то составляющія X , Y , Z суть нули; отсюда слѣдуетъ, что $\mathfrak{E} = 0$ при любомъ перемѣщеніи δx , δy , δz . Обратно, коль скоро $\mathfrak{E} = 0$ при любомъ перемѣщеніи, т. е. при любыхъ значеніяхъ количествъ δx , δy , δz , то

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

и точка находится въ равновѣсіи.

274. Точка, движущаяся на неподвижной поверхности. — Разсмотримъ теперь точку, которая можетъ перемѣщаться безъ тренія по неподвижной поверхности

$$f(x, y, z) = 0$$

подъ дѣйствіемъ результирующей силы F . Здѣсь имѣется связь, выраженная предыдущимъ уравненіемъ, и единственные перемѣщенія, допускаемыя этой связью, суть тѣ, которыя совершаются по этой поверхности. Если точка находится въ равновѣсіи, то сила F нормальна къ поверхности и, слѣдовательно, также ко всѣмъ возможнымъ перемѣщеніямъ; для каждаго изъ нихъ возможная работа силы F равна нулю.

Обратно, если работа $\mathcal{E}$ равна нулю для любого перемѣщенія MM' на поверхности, то, согласно равенству

$$\mathcal{E} = F \cdot MM' \cos (F, MM'),$$

либо

$$F = 0,$$

либо же

$$\cos (F, MM') = 0,$$

т. е. либо сила равна нулю, и имѣть мѣсто равновѣсіе, либо же сила нормальна къ всякому перемѣщенію на поверхности, а, слѣдовательно, также къ поверхности, и опять имѣть мѣсто равновѣсіе.

275. Точка, движущаяся по неподвижной кривой. — Когда матеріальная точка должна оставаться на неподвижной кривой

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0,$$

то имѣемъ два уравненія связи; единственными перемѣщеніями, которыя допускаются связями, будутъ тѣ, которыя совершаются по этой кривой. Если имѣть мѣсто равновѣсіе подѣ дѣйствіемъ силы F , то возможная работа этой силы равна нулю, такъ какъ эта сила нормальна къ кривой. Обратно, если работа при такомъ перемѣщеніи равна нулю, то сила либо равна нулю, либо же нормальна къ кривой, и въ обоихъ этихъ случаяхъ будетъ равновѣсіе.

276. Совершенно свободное твердое тѣло. — Разсмотримъ свободное твердое тѣло, находящееся подѣ дѣйствіемъ данныхъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$. Это твердое тѣло состоитъ изъ большого числа матеріальныхъ точекъ, которыя должны оставаться на неизмѣнныхъ разстояніяхъ однѣ отъ другихъ: въ этомъ и заключается дѣйствіе связей, наложенныхъ на систему. Въ этомъ случаѣ единственные перемѣщенія, допускаемыя связями, суть тѣ, при которыхъ форма твердаго тѣла остается безъ измѣненій. Въ одномъ изъ такихъ перемѣщеній назовемъ черезъ a, b, c проекціи скорости точки тѣла, совпадающей съ началомъ O , и черезъ p, q, r проекціи мгновеннаго вращенія; эти шесть количествъ могутъ быть выбраны произвольнымъ образомъ, такъ какъ мы можемъ сообщить тѣлу любое перемѣщеніе. Скорость точки x, y, z имѣетъ проекціи

$$V_x = a + qz - ry, \quad V_y = b + rx - pz, \quad V_z = c + py - qx,$$

а ея перемѣщеніе —

$$\delta x = V_x \delta t, \quad \delta y = V_y \delta t, \quad \delta z = V_z \delta t,$$

такъ что возможная работа

$$\mathcal{E}_v = X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v,$$

силы F_v , приложенной къ точкѣ x_v, y_v, z_v , выразится такъ:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_v = \delta t [aX_v + bY_v + cZ_v + p(y_v Z_v - z_v Y_v) \\ + q(z_v X_v - x_v Z_v) + r(x_v Y_v - y_v X_v)]. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, сумма возможныхъ работъ всѣхъ непосредственно приложенныхъ силъ равна

$$\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_v = \delta t (aX + bY + cZ + pL + qM + rN),$$

гдѣ мы черезъ X, Y, Z, L, M, N обозначили координаты системы векторовъ, представляющихъ непосредственно приложенныя силы. Если тѣло находится въ равновѣсіи, то

$$X = Y = Z = L = M = N = 0,$$

и отсюда слѣдуетъ, что $\mathcal{E} = 0$ при всѣхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связями. Обратно, коль скоро $\mathcal{E} = 0$ при любыхъ значеніяхъ количествъ a, b, c, p, q, r (т. е. при всякомъ перемѣщеніи, допускаемомъ связями), то коэффициенты этихъ количествъ будутъ нулями, т. е. удовлетворяются условія равновѣсія.

277. Предварительная теорема о возможной работѣ силъ связи. — Мы дадимъ доказательство начала возможныхъ скоростей, основанное на слѣдующей предварительной теоремѣ.

Если связи осуществляются безъ тренія, то сумма возможныхъ работъ силъ связи равна нулю при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связями, безразлично, имѣетъ ли мѣсто равновѣсіе или нѣтъ.

Мы провѣримъ это предложеніе на различныхъ типахъ обычныхъ связей.

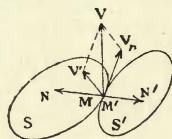
1° Если точка M движется на неподвижной поверхности S или на неподвижной кривой C , то силой связи является нормальная реакція; очевидно, что при всякомъ перемѣщеніи, допускаемомъ связью, т. е. при бесконечно маломъ перемѣщеніи по поверхности или кривой, работа реакціи равна нулю.

2° Твердое тѣло представляетъ собой совокупность матеріальныхъ точекъ, которыя должны оставаться на неизмѣнныхъ

разстояніяхъ одна отъ другой; силами связи являются взаимодѣйствія этихъ точекъ. Пусть M_1 и M_2 будутъ двѣ точки тѣла, r — разстояніе между ними и F — алгебраическое значеніе ихъ взаимодѣйствія, удовлетворяющее условіямъ, которыя мы заключили въ п. 82. При произвольномъ возможномъ перемѣщеніи, сообщаемомъ точкамъ, сумма элементарныхъ работъ ихъ взаимодѣйствія равна $F \delta r$ (п. 82). Если перемѣщеніе допускается связью, то разстояніе r остается постояннымъ, количество δr равно нулю и сумма работъ силъ связи равна нулю. То же самое вѣрно и для всѣхъ взаимодѣйствій точекъ твердаго тѣла, взятыхъ попарно, такъ что предположеніе наше для этого случая доказано.

3° Разсмотримъ два твердыхъ тѣла, сочлененныхъ въ точкѣ O . Силами связи являются равныя и противоположныя реакціи P, P' этихъ двухъ тѣлъ, приложенныя въ точкѣ O ; такъ какъ ихъ точки приложенія остаются слитыми при всѣхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связью, то сумма возможныхъ работъ этихъ двухъ силъ остается равной нулю. То же самое вѣрно и въ томъ случаѣ, если каждое изъ двухъ тѣлъ связано съ другимъ болѣе, чѣмъ въ одной точкѣ, напримѣръ, если тѣла сочленены посредствомъ шарнира.

4° Теперь рассмотримъ систему двухъ поверхностей, которыя должны скользить одна по другой безъ тренія (фиг. 172); силы связи



Фиг. 172.

суть реакціи N, N' поверхностей; эти реакціи равны по величинѣ, противоположно направлены и нормальны къ общей касательной плоскости поверхностей въ точкѣ касанія послѣднихъ. Пусть V и V' будутъ возможныя скорости точекъ M и M' , въ которыхъ касаются въ разсматриваемый моментъ поверхности S и S' . Эти скорости не тождественны, такъ какъ мы можемъ, напримѣръ, получить перемѣщеніе, допускаемое связями, если оставимъ поверхность S въ покоѣ и заставимъ поверхность S' скользить по первой. Обозначивъ черезъ V_n, V'_n соответственно проекціи возможныхъ скоростей V и V' на реакцію MN , мы получимъ для возможной работы реак-

ции N выражение $NV_n \delta t$, а для возможной работы реакции N' мы будемъ имѣть выраженіе — $N'V'_n \delta t$, ибо проекція скорости V' на направленіе N' равна по абсолютной величинѣ и противоположна по знаку проекціи скорости V' на противоположное направленіе N . Такимъ образомъ полная возможная работа реакцій будетъ

$$\mathfrak{E}' = \delta t (NV_n - N'V'_n) = N \delta t (V_n - V'_n).$$

Движеніе поверхности S относительно S' есть скольженіе, такъ что скорость V_r точки M относительно поверхности S' лежитъ въ общей касательной плоскости и абсолютная скорость точки M равна

$$(V) = (V_e) + (V_r),$$

гдѣ V_e есть переносная скорость точки M . По опредѣленію, эта послѣдняя скорость есть скорость той точки системы сравненія S' , которая совпадаетъ съ точкой M , т. е. скорость V' точки M' . Слѣдовательно,

$$(V) = (V') + (V_r);$$

проектируя на направленіе $N'N$, получимъ

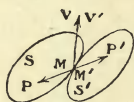
$$V_n = V'_n,$$

ибо проекція скорости V_r , лежащей въ касательной плоскости, равна нулю; итакъ, работа $\mathfrak{E}'$ равна нулю.

5° Предположимъ, наконецъ, что твердое тѣло нѣкоторой системы ограничено поверхностью S , которая должна катиться и вертѣться безъ скольженія по поверхности S' , также ограничивающей нѣкоторое тѣло системы. Взаимодѣйствіе поверхностей S и S' въ точкѣ ихъ касанія уже не будетъ нормально къ общей касательной плоскости, потому что оно противодѣйствуетъ скольженію. Пусть MP будетъ дѣйствіе поверхности S' на S , приложенное къ той точкѣ M поверхности S , которая совпадаетъ съ точкой касанія, и $M'P'$ — реакція поверхности S на S' , приложенная къ той точкѣ M' поверхности S' , которая совпадаетъ съ точкой касанія; эти двѣ силы равны и противоположны. Дадимъ системѣ перемѣщеніе, допускаемое связями, т. е. такое, при которомъ поверхности S и S' перемѣщаются и въ то же время первая катится по второй. Назовемъ попрежнему черезъ V и V' возможные скорости точекъ M и M' и черезъ V_p и V'_p ихъ проекціи на направленіе MP . Сумма возможныхъ работъ силъ P и P' связи равна

$$\mathfrak{E}' = \delta t (PV_p - P'V'_p) = P \delta t (V_p - V'_p).$$

Такъ какъ движеніе поверхности S относительно S' есть каченіе и верченіе, то скорость V_r точки M относительно поверх-



Фиг. 173.

ности S равна нулю; переносная скорость точки M попрежнему есть скорость V' точки M' , и общая формула

$$(V) = (V_e) + (V_r)$$

дастъ равенство

$$(V) = (V').$$

Такъ какъ скорости V и V' равны, то ихъ проекціи V_p и V'_p также равны, и работа $\mathcal{E}'$, конечно, равна нулю.

6° Комбинаціи предыдущихъ связей. — Связи, осуществленныя въ машинахъ, представляютъ собой комбинаціи предыдущихъ. Такъ, легко вывести, что связи, осуществляемыя при помощи нитей или цѣпей, суть сочетанія разсмотрѣнныхъ выше связей.

Представимъ себѣ, на примѣръ, что двѣ точки M и M_1 системы связаны между собой нерастяжимой цѣпью C , которая одной своей частью натянута на поверхности S ; по этой послѣдней цѣпь можетъ скользить безъ тренія, при чемъ поверхность можетъ быть неподвижной или можетъ находиться въ движеніи. Эта связь представляетъ собой комбинацію двухъ предыдущихъ; звенья суть твердыя тѣла, каждое изъ которыхъ соединено съ послѣдующимъ въ одной точкѣ или вдоль оси; тѣ звенья, которыя касаются поверхности S , скользятъ по ней безъ тренія. Одна изъ двухъ точекъ, на примѣръ M_1 , могла бы также быть неизмѣнно связана съ поверхностью S ; мы опять получили бы связь, разсмотрѣнную выше. Къ связямъ этого рода относятся въ частности тѣ, которыя осуществляются при помощи бѣлковъ.

278. Общее опредѣленіе связей безъ тренія. — Мы сейчасъ видѣли, что въ простѣйшихъ связяхъ и ихъ комбинаціяхъ сумма возможныхъ работъ силъ связи равна нулю при всякомъ возможномъ перемѣщеніи, допускаемомъ связями, если только нѣтъ тре-

нія. Въ случаѣ же связей болѣе сложной природы, напримѣръ, связей, выражаемыхъ уравненіями, предыдущее свойство принимается, какъ опредѣленіе „связи безъ тренія“: если при всякомъ перемѣщеніи, допускаемомъ связями, сумма работъ силъ связи равна нулю, то эти связи безъ тренія.

279. Доказательство начала возможныхъ работъ. —

Разсмотримъ систему матеріальныхъ точекъ $M_1, M_2, \dots$, которыя подчинены связямъ безъ тренія и находятся подъ дѣйствіемъ непосредственно приложенныхъ силъ. Назовемъ черезъ x_v, y_v, z_v координаты одной изъ этихъ точекъ M_v и черезъ X_v, Y_v, Z_v проекціи результирующей F_v силъ, непосредственно приложенныхъ къ этой точкѣ. Постараемся доказать слѣдующее предположеніе: для того, чтобы система въ нѣкоторомъ положеніи находилась въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы при любомъ возможномъ перемѣщеніи системы, выводящемъ ее изъ этого положенія и допускаемомъ связями, сумма возможныхъ работъ непосредственно приложенныхъ силъ была равна нулю.

Докажемъ сперва, что это условіе необходимо. Точку M_v мы можемъ разсматривать, какъ свободную, при условіи, что къ ней приложены нѣкоторыя силы $F_v^1, F_v^2, \dots$ связи; эта точка находится тогда въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ и силъ связи. При любомъ возможномъ перемѣщеніи, сообщенномъ этой точкѣ, сумма работъ всѣхъ этихъ силъ равна нулю. То же самое вѣрно для всякой точки системы; поэтому, если мы сообщимъ точкамъ системы произвольное возможное перемѣщеніе, допускаемое или не допускаемое связями, то сумма работъ всѣхъ силъ, какъ данныхъ, такъ и связи, равна нулю. Обозначивъ черезъ $\mathcal{E}_D$ сумму работъ силъ, непосредственно приложенныхъ, и черезъ $\mathcal{E}_L$ сумму работъ силъ связи, мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$\mathcal{E}_D + \mathcal{E}_L = 0.$$

Но если взять возможное перемѣщеніе, допускаемое связями, то $\mathcal{E}_L = 0$ (п. 277); слѣдовательно,

$$\mathcal{E}_D = 0.$$

Теперь докажемъ, что наше условіе достаточно. Для этого достаточно доказать, что въ томъ случаѣ, когда система не нахо-

дится въ равновѣсіи, существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно перемѣщеніе, которое допускается связями и при которомъ сумма $\mathcal{E}_D$ отлична отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, если система не находится въ равновѣсіи, и мы предоставимъ ее самой себѣ, то она придетъ въ движеніе. Перемѣщеніе, получаемое при этомъ ея различными точками, принадлежитъ къ тѣмъ, которыя допускаются связями, и каждая точка M_v перемѣщается, какъ свободная, въ направленіи результирующей всѣхъ дѣйствующихъ на нее силъ $F_v, F'_v, F''_v, \dots$, какъ заданныхъ, такъ и обусловленныхъ связью. При этомъ дѣйствительномъ перемѣщеніи всѣ начальныя скорости равны нулю, но мы можемъ сообщить системѣ возможное перемѣщеніе, направленіе котораго тождественно съ направленіемъ дѣйствительнаго перемѣщенія, при чемъ возможныя скорости точекъ M_v не всѣ равны нулю. Тогда сумма работъ силъ $F_v, F'_v, F''_v, \dots$, равная работѣ ихъ результирующей, будетъ положительной, такъ какъ перемѣщеніе имѣетъ такое же направленіе и обращено въ ту же сторону, что и эта результирующая. Такъ какъ то же самое вѣрно для каждой точки, то сумма $\mathcal{E}_D + \mathcal{E}_L$ работъ заданныхъ силъ и силъ связи при разсматриваемомъ перемѣщеніи будетъ положительная величина, а не нуль.

Но въ силу того, что это перемѣщеніе допускается связями, $\mathcal{E}_L = 0$; слѣдовательно,

$$\mathcal{E}_D > 0,$$

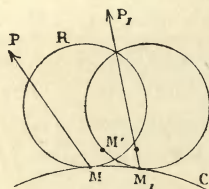
что и требовалось доказать.

280. Замѣчаніе о работѣ силы. — Вычисляя элементарную работу силы, возможную или дѣйствительную, не нужно смѣшивать матеріальной точки, къ которой приложена сила, съ геометрической точкой приложенія силы. Въ выраженіи элементарной работы

$$F \cdot MM' \cos(F, MM'), \quad FV \cos(F, V) dt,$$

MM' и V обозначаютъ безконечно малое перемѣщеніе и скорость матеріальной точки, къ которой приложена сила, а не перемѣщеніе и скорость геометрической точки приложенія силы. Напримѣръ, если колесо R (фиг. 174) катится по неподвижной кривой C , то реакція P кривой приложена къ матеріальной точкѣ M , находящейся въ точкѣ касанія; черезъ промежутокъ времени dt колесо займетъ безконечно близкое положеніе, контактъ будетъ уже въ

другой точкѣ M_1 колеса, и реакція P_1 будетъ приложена къ точкѣ M_1 ; матеріальная же точка M , которая раньше была въ контактѣ, теперь окажется въ положеніи M' . Въ работу реакціи P входятъ перемѣщеніе MM' (не указанное на чертежѣ) и скорость $\frac{MM'}{\delta t}$



Фиг. 174.

матеріальной точки M (она равна нулю вслѣдствіе каченія), а не перемѣщеніе MM_1 и скорость $\frac{MM_1}{\delta t}$ геометрической точки приложенія.

II. — ОБЩІЯ УСЛОВІЯ РАВНОВѢСІЯ, ВЫТЕКАЮЩІЯ ИЗЪ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХЪ РАБОТЪ

281. Общее уравненіе статики. — Рассмотримъ матеріальную систему, находящуюся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ и подчиненную связямъ безъ тренія. Пусть $F_v(X_v, Y_v, Z_v)$ будетъ результирующей данныхъ силъ, дѣйствующихъ на точку $M_v(x_v, y_v, z_v)$. Начало возможныхъ скоростей даетъ уравненіе

$$\Sigma (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = 0. \quad (1)$$

которое должно удовлетворяться при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$, допускаемыхъ связями.

Это уравненіе называется общимъ уравненіемъ статики, потому что изъ него, какъ мы сейчасъ покажемъ, можно вывести въ каждомъ частномъ случаѣ уравненія равновѣсія системы.

Первымъ дѣломъ нужно найти всѣ возможные перемѣщенія, допускаемыя связями. Мы сейчасъ покажемъ, какимъ образомъ можно получить эти перемѣщенія.

282. Система съ k степенями свободы¹⁰⁾; k условий равновѣсія. — Чтобы получить самое общее перемѣщеніе опредѣ-

ленной системы, допускаемое связями, достаточно дать нѣкоторому числу k параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ совершенно произвольныя варіаціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$. Въ этомъ случаѣ принято говорить, что система имѣетъ k степеней свободы. Мы сейчасъ увидимъ, что число уравненій равновѣсія равно k .

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ перемѣщеніе системы опредѣляется произвольными варіаціями $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$, то варіаціи $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \dots$ координатъ различныхъ точекъ системы будутъ опредѣлены, если будемъ знать варіаціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$. Для варіацій координатъ мы будемъ, слѣдовательно, имѣть выраженія вида

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= a_{11} \delta q_1 + a_{12} \delta q_2 + \dots + a_{1k} \delta q_k, \\ \delta y_1 &= b_{11} \delta q_1 + b_{12} \delta q_2 + \dots + b_{1k} \delta q_k, \\ \delta z_1 &= c_{11} \delta q_1 + c_{12} \delta q_2 + \dots + c_{1k} \delta q_k, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta x_v &= a_{v1} \delta q_1 + a_{v2} \delta q_2 + \dots + a_{vk} \delta q_k, \\ \delta y_v &= b_{v1} \delta q_1 + b_{v2} \delta q_2 + \dots + b_{vk} \delta q_k, \\ \delta z_v &= c_{v1} \delta q_1 + c_{v2} \delta q_2 + \dots + c_{vk} \delta q_k, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если мы подставимъ эти значенія въ общее уравненіе статики (1), то оно преобразуется къ виду

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k = 0, \quad (3)$$

гдѣ

$$Q_i = \sum_{v=1}^{v=n} (X_v a_{vi} + Y_v b_{vi} + Z_v c_{vi}).$$

Такъ какъ уравненіе (3) должно удовлетворяться при любыхъ значеніяхъ варіацій $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$, то равенства

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_k = 0 \quad (4)$$

должны удовлетворяться совмѣстно.

Мы имѣемъ такимъ образомъ k необходимыхъ и достаточныхъ условій равновѣсія; число этихъ уравненій какъ разъ равно числу степеней свободы системы.

Эти уравненія равновѣсія (4) можно интерпретировать слѣдующимъ образомъ. Если произвольно выберемъ варіаціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$, то для соотвѣтствующаго имъ перемѣщенія сумма $\mathfrak{E}_D$ возможныхъ работъ данныхъ силъ равна

$$\mathfrak{E}_D = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k.$$

Вообразимъ въ частности перемѣщеніе, при которомъ варіація δq_1 отлична отъ нуля, а прочія варіаціи $\delta q_2, \delta q_3, \dots, \delta q_k$ равны нулю; въ этомъ частномъ перемѣщеніи сумма работъ данныхъ силъ равна

$$\mathfrak{E}_1 = Q_1 \delta q_1,$$

и первое уравненіе равновѣсія $Q_1 = 0$ выражаетъ, что эта работа $\mathfrak{E}_1$ есть нуль.

Точно такъ же уравненіе $Q_2 = 0$ выражаетъ, что сумма $\mathfrak{E}_2 = Q_2 \delta q_2$ работъ данныхъ силъ при частномъ перемѣщеніи $\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_k = 0$ равна нулю, и т. д.

Итакъ, мы получимъ k уравненій равновѣсія, если будемъ варіировать послѣдовательно только одинъ изъ k параметровъ и напомнимъ, что соотвѣтствующая сумма элементарныхъ работъ данныхъ силъ равна нулю.

283. Частный случай. — Одна степень свободы; полносвязная система. Полносвязной системой называютъ систему, имѣющую только одну степень свободы. Чтобы сообщить системѣ наиболѣе общее перемѣщеніе, допускаемое связями, достаточно дать одному параметру q варіацію δq . Тогда сумма возможныхъ работъ данныхъ силъ равна

$$\mathfrak{E}_D = Q \delta q,$$

и уравненіе равновѣсія будетъ $Q = 0$. Точка, движущаяся по кривой, твердое тѣло, которое должно вращаться вокругъ неподвижной оси, и винтъ, движущійся въ неподвижной гайкѣ, суть полносвязныя системы.

Простыя машины. — Большинство простыхъ машинъ, воротъ, винтъ, клинъ, домкратъ представляютъ собой полносвязныя системы, находящаяся подъ дѣйствіемъ двухъ силъ: одна называется движущей силой P , а другая — сопротивленіемъ R . Чтобы найти условіе равновѣсія, мы сообщаемъ машинѣ единственное возможное перемѣще-

ніе, допускаемое связями. Въ этомъ перемѣщеніи пусть δP будетъ проекція на силу P перемѣщенія AA' точки приложенія A движущей силы и δR — проекція на сопротивление R перемѣщенія BB' точки приложенія B сопротивления (фиг. 175). Условіе равновѣсія выразится такъ:

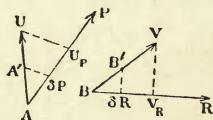
$$P \delta P + R \delta R = 0.$$

Введя вмѣсто перемѣшеній возможныя скорости, мы получаемъ условіе

$$PU_P + RV_R = 0,$$

$$\frac{P}{R} = -\frac{V_R}{U_P},$$

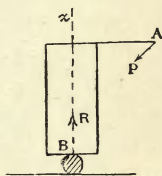
гдѣ U_P обозначаетъ проекцію на силу P возможной скорости U точки A , а V_R есть проекція на сопротивление R скорости V точки B . Итакъ, при равновѣсіи движущая сила и сопротивление



Фиг. 175.

обратно пропорціональны возможнымъ скоростямъ ихъ точекъ приложенія, при чемъ берутся во вниманіе направленія скоростей. Этотъ результатъ Галилей выразилъ слѣдующимъ образомъ: „Что выигрывается въ силѣ, то теряется въ скорости“.

Примѣръ.—Зажимный винтъ. — Предположимъ, что движущая сила P перпендикулярна къ оси Bz (фиг. 176) винта и приложена въ точкѣ A



Фиг. 176.

на разстояніи a отъ этой оси нормально къ плоскости AzB , а сопротивление R дѣйствуетъ въ направленіи самой этой оси. При бесконечно маломъ вращеніи $\delta\theta$, единственномъ перемѣщеніи, допускаемомъ связями, точка A

описываетъ безконечно малую дугу винтовой линіи; проекція δP этой дуги на движущую силу P есть дуга круга радіуса a , соответствующая центральному углу $\delta\theta$:

$$\delta P = a \delta\theta.$$

Проекція же δR имѣетъ значеніе

$$\delta R = -\frac{h}{2\pi} \delta\theta,$$

гдѣ h есть ходъ винта; дѣйствительно, скольженіе винта вдоль его оси пропорціонально его вращенію, и ходъ h есть скольженіе, соответствующее полному обороту. Слѣдовательно, условіе равновѣсія есть

$$Pa \delta\theta - R \frac{h}{2\pi} \delta\theta = 0, \quad P = \frac{h}{2\pi a} R,$$

откуда видно, что выгоднѣе увеличить радіусъ a и уменьшить ходъ винта.

2° Двѣ степени свободы. — Простѣйшимъ примѣромъ системы съ двумя степенями свободы служить точка, движущаяся по неподвижной поверхности, такъ какъ положеніе точки на поверхности опредѣляется двумя параметрами q_1 и q_2 ; поэтому самое общее возможное перемѣщеніе точки на поверхности получится, если дадимъ параметрамъ q_1 и q_2 произвольныя безконечно малыя приращенія δq_1 и δq_2 . Существуютъ два уравненія равновѣсія $Q_1=0$, $Q_2=0$, которыя мы раньше (п. 85) получили прямымъ методомъ.

Въ видѣ другого примѣра рассмотримъ твердое тѣло, которое можетъ свободно вращаться вокругъ неподвижной оси Oz и въ то же время свободно скользить вдоль этой оси. Самое общее безконечно малое перемѣщеніе, допускаемое связями, получится, если сообщимъ тѣлу скольженіе δz вдоль оси и вращеніе на уголъ $\delta\theta$ вокругъ оси. Чтобы получить два уравненія равновѣсія, нужно выразить, что при скольженіи $\delta z \neq 0$, $\delta\theta = 0$ и вращеніи $\delta z = 0$, $\delta\theta \neq 0$ сумма работъ приложенныхъ силъ равна нулю.

Составимъ эти два уравненія. Пусть X_v , Y_v , Z_v будутъ проекціи данныхъ силъ F_v , приложенныхъ къ тѣлу. При скольженіи δz , параллельномъ оси Oz , работа силы F_v равна $Z_v \delta z$; слѣдовательно, сумма работъ силъ равна

$$(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \delta z,$$

т. е. $Z \delta z$, если черезъ Z обозначимъ сумму проекцій силъ F_v на ось Oz . Отсюда вытекаетъ первое условіе равновѣсія

$$Z = 0$$

При вращении $\delta\theta$ вокруг оси Oz элементарная работа F_v есть $N_v\delta\theta$, гдѣ N_v есть моментъ силы F_v около оси Oz ; поэтому сумма работъ данныхъ силъ равна

$$(N_1 + N_2 + \dots + N_n) \delta\theta$$

или $N\delta\theta$, гдѣ N есть сумма моментовъ этихъ силъ около оси Oz , и второе уравненіе равновѣсія будетъ

$$N = 0.$$

Эти же самыя два уравненія мы раньше (п. 114) составили прямымъ способомъ.

3° Система съ тремя степенями свободы. Твердое тѣло, движущееся около неподвижной точки O , есть система съ тремя степенями свободы. Дѣйствительно, если вообразимъ неподвижный трехгранный уголь $Oxyz$, то самое общее бесконечно малое перемѣщеніе системы, при которомъ точка O остается неподвижной, можетъ быть получено посредствомъ трехъ произвольныхъ вращеній $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ соотвѣтственно вокругъ осей Ox, Oy, Oz . Въ этомъ случаѣ уравненій равновѣсія будетъ три: одно изъ нихъ получится, когда повернемъ тѣло вокругъ оси Ox на произвольный уголь $\delta\alpha$ ($\delta\beta = \delta\gamma = 0$); другое уравненіе получимъ, повернувъ тѣло на произвольный уголь $\delta\beta$ вокругъ оси Oy ($\delta\gamma = \delta\alpha = 0$), и третье, — когда повернемъ тѣло на произвольный уголь $\delta\gamma$ вокругъ оси Oz ($\delta\alpha = \delta\beta = 0$). Если назвать черезъ L, M, N суммы моментовъ данныхъ силъ около осей Ox, Oy, Oz , то сумма элементарныхъ работъ данныхъ силъ равна при первомъ перемѣщеніи $L\delta\alpha$, при второмъ $M\delta\beta$ и при третьемъ $N\delta\gamma$. Слѣдовательно, три уравненія равновѣсія будутъ

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

эти же самыя уравненія мы въ п. 112 получили другимъ способомъ.

Въ видѣ второго примѣра разсмотримъ твердый шаръ, который долженъ катиться и вертѣться по неподвижной плоскости. Это связь особаго рода, которая не можетъ быть выражена конечными уравненіями; къ связямъ этого рода мы вернемся при разсмотрѣніи уравненій Лагранжа. Но съ точки зрѣнія статики не представляется никакихъ затрудненій,

Найдемъ условія равновѣсія этого шара подѣйствіемъ приложенныхъ силъ $F_1, F_2, \dots, F_n$. Пусть O будетъ точка касанія шара съ плоскостью; возьмемъ три оси: ось Oz , нормальную къ

плоскости, касающейся шара въ точкѣ O , и оси Ox и Oy въ этой плоскости; назовемъ черезъ L , M , N суммы моментовъ данныхъ силъ около этихъ осей. Связи допускаютъ тѣ возможные перемѣщенія, при которыхъ шаръ передвигается на бесконечно малое разстояніе, катясь и вертясь по неподвижной плоскости. При этомъ движеніи скорость матеріальной точки, совпадающей съ точкой касанія O , равна нулю, и перемѣщеніе сводится къ бесконечно малому вращенію вокругъ произвольной оси, проведенной изъ точки O , т. е. къ тремъ произвольнымъ вращеніямъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ соответственно вокругъ осей Ox , Oy , Oz . Этимъ тремъ вращеніямъ соответствуютъ суммы работъ силъ

$$L\delta\alpha, \quad M\delta\beta, \quad N\delta\gamma,$$

и три уравненія равновѣсія будутъ

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0.$$

Они выражаютъ, что приложенныя силы должны имѣть только результирующую, проходящую черезъ точку касанія O .

Въ этомъ мы могли бы убѣдиться также посредствомъ элементарныхъ соображеній, такъ какъ реакція плоскости на шаръ есть сила неизвѣстнаго направленія, проходящая черезъ точку O .

284. Частный случай, когда выраженіе возможной работы есть полный дифференціалъ. — Вернемся къ выраженію полной возможной работы данныхъ силъ при самомъ общемъ перемѣщеніи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ системы, имѣющей k степеней свободы:

$$\mathcal{E}_D = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots + Q_k\delta q_k.$$

Предположимъ, во-первыхъ, что коэффиціенты $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ суть функціи лишь количествъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ ¹¹⁾, и, во-вторыхъ, что выраженіе $\mathcal{E}_D$ есть полный дифференціалъ функціи $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$. Тогда

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k},$$

и уравненіями равновѣсія будутъ тѣ, которыя мы написали бы, если бы желали отыскать экстремы функціи U . Ниже мы увидимъ, что системѣ значеній параметровъ q , при которыхъ функція U по-

лучаетъ значеніе максимумъ, соотвѣтствуетъ положеніе устойчиваго равновѣсія (Леженъ-Дирихле).

Разсматриваемый случай имѣетъ мѣсто въ частности, если удовлетворяются два слѣдующихъ условія: 1° существуетъ силовая функція, т. е. выраженіе

$$\mathcal{E}_D = \Sigma (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v)$$

есть полный дифференціалъ функціи U координатъ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ точекъ системы; 2° эти координаты могутъ быть выражены въ функціи нѣкоторыхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ посредствомъ выражений конечнаго вида:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= \varphi_v(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y_v &= \psi_v(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z_v &= \chi_v(q_1, q_2, \dots, q_k) \end{aligned} \right\} (v = 1, 2, \dots, n).$$

Дѣйствительно, если мы замѣнимъ координаты и ихъ дифференціалы ихъ значеніями въ функціи параметровъ q и приращеній δq , то разсматриваемое выраженіе $\mathcal{E}_D$ останется полнымъ дифференціаломъ. Однако, обратное предложеніе невѣрно: можетъ случиться, что выраженіе $Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_k \delta q_k$ есть полный дифференціалъ, но силовой функціи въ тѣсномъ смыслѣ слова не существуетъ.

285. Приложение; тяжелое тѣло. — Разыщемъ положенія равновѣсія системы, находящейся подъ дѣйствіемъ только вѣса, который является единственной непосредственно приложенной силой: въ этомъ случаѣ непосредственно приложенныя силы допускаютъ силовую функцію. Дѣйствительно, предположимъ, что ось Oz направлена вертикально внизъ; вѣсъ точки m_v системы равенъ $m_v g$, и возможная работа этого вѣса есть $m_v g \delta z_v$; сумма возможныхъ работъ равна, слѣдовательно,

$$g \Sigma m_v \delta z_v = g M \delta \zeta,$$

гдѣ ζ есть ордината центра тяжести.

Положеніями равновѣсія здѣсь будутъ тѣ, для которыхъ $\delta \zeta = 0$.

Если предположимъ, что ζ есть функція отъ k геометрически независимыхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, опредѣляющихъ положеніе системы, то положеніями равновѣсія будутъ тѣ, которыя мы

нашли бы, разыскивая экстремы ординаты ζ . Если мы допустимъ теорему Дирихле объ устойчивомъ равновѣсїи, т. е. примемъ, что равновѣсіе устойчиво, когда силовая функція достигаетъ максимума, то въ разсматриваемомъ примѣрѣ равновѣсіе будетъ устойчивымъ, когда центръ тяжести занимаетъ наиболѣе низкое положеніе сравнительно съ всѣми сосѣдними.

III. — МНОЖИТЕЛИ ЛАГРАНЖА.

286. Случай, когда связи выражены уравнениями между координатами точек системы. — Для этого случая, который имѣетъ главнымъ образомъ теоретическое значеніе, Лагранжъ далъ уравненія равновѣсія системы въ интересномъ видѣ. Предположимъ, что система n точек $M_1, M_2, \dots, M_n$, имѣющихъ координаты $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n$ подчинена связямъ, которыя выражаются посредствомъ конечныхъ соотношеній между координатами:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \dots, z_n) &= 0, \\ \dots, \\ f_h(x_1, \dots, z_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Число h этих уравнений должно быть меньше числа $3n$, т. е. числа координатъ, ибо въ противномъ случаѣ положеніе системы было бы вполне опредѣлено связями. Положимъ

$$k = 3n - h.$$

Система иметь k степеней свободы, потому что при помощи уравнений (1) можно выразить все координаты в функции k из них. Если $k=1$, то система полностью связная.

Обозначим через (X_ν, Y_ν, Z_ν) составляющія результирующей F_ν данныхъ силъ, дѣйствующихъ на точку M_ν ; уравненіе

$$\Sigma_p(X_p\delta x_p + Y_p\delta y_p + Z_p\delta z_p) = 0 \quad (2)$$

должно удовлетворяться всѣми перемѣщеніями $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$, которыя допускаются связями.

Возможныя перемѣщенія точекъ M связаны h соотношеніями, которыя получаются при дифференцированіи уравненій (1): дѣйстви-

тельно, такъ какъ перемѣщеніе допускается связями, то координаты точекъ системы до и послѣ перемѣщенія должны удовлетворять этимъ соотношеніямъ. Слѣдовательно, имѣемъ h уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \delta z_n &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \delta z_n &= 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_h}{\partial z_n} \delta z_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Эти h соотношеній между $3n$ вариациями координатъ показываютъ, что k вариаций могутъ быть выбраны произвольно; эти вариации мы будемъ называть независимыми, прочія же вариации, которыя опредѣляются уравненіями (3), мы будемъ называть зависимыми. Теперь покажемъ Лагранжевъ способъ множителей, посредствомъ котораго можно найти условія равновѣсія въ симметричномъ видѣ.

Умножимъ h уравненій (3) соотвѣтственно на множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ и сложимъ ихъ съ уравненіемъ (2); затѣмъ распорядимся этими множителями такимъ образомъ, чтобы коэффициенты при h зависимыхъ вариацияхъ обратились въ нули; тогда коэффициенты при k независимыхъ вариацияхъ также должны быть равны нулю, ибо полученное выраженіе должно быть нулемъ при любыхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ. Въ конечномъ счетѣ множители λ опредѣляются такимъ образомъ, что всѣ коэффициенты обращаются въ нули, и мы получаемъ систему $3n$ совокупныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} X_v + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_v} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_v} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_v} &= 0 \\ Y_v + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_v} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_v} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_v} &= 0 \\ Z_v + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_v} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_v} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (v=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Эти уравненія вмѣстѣ съ h уравненіями связей (1) дадутъ намъ всего $3n + h$ уравненій, опредѣляющихъ $3n$ координатъ и h вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.

Таковы общія уравненія равновѣсія.

Зная множители λ , мы можемъ опредѣлить силы связи. Дѣйствительно, уравненія равновѣсія не измѣнятся, если мы устранимъ, на примѣръ, связь $f_1 = 0$ и къ даннымъ силамъ, дѣйствующимъ на точку M_v , присоединимъ силу, проекціи которой равны $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_v}$, $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_v}$, $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_v}$; эта сила представляетъ собой, слѣдовательно, дѣйствіе связи на точку M_v ; это и есть то, что мы называли силою связи. Мы имѣемъ непосредственно ея величину; ея направляющіе косинусы пропорціональны количествамъ $\frac{\partial f_1}{\partial x_v}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y_v}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z_v}$: она нормальна къ поверхности, которая получится, если въ уравненіи $f=0$ мы дадимъ всѣмъ координатамъ, исключая x_v, y_v, z_v , численныя значенія, соотвѣтствующія положенію равновѣсія, а координаты x_v, y_v, z_v будемъ разсматривать, какъ текущія.

Замѣчаніе. — Мы уже сказали, что этотъ Лагранжевъ способъ множителей имѣетъ только теоретическое значеніе. На практикѣ онъ можетъ привести къ тому, что число уравненій будетъ чрезвычайно велико, такъ какъ при этомъ способѣ выявляются всѣ силы связи.

287. Примѣръ. — Двѣ матеріальныя точки находятся соотвѣтственно подъ дѣйствіемъ силъ F_1 и F_2 ; онѣ подчинены слѣдующимъ тремъ связямъ:

1° точка M_1 скользитъ безъ тренія по неподвижной поверхности

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0; \quad (1)$$

2° точка M_2 скользитъ по неподвижной поверхности

$$f_2(x_2, y_2, z_2) = 0; \quad (2)$$

3° обѣ точки связаны между собой твердымъ стержнемъ; эта связь выражается уравненіемъ:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - l = 0, \quad (3)$$

Такъ какъ здѣсь шесть координатъ и три уравненія связи, то система имѣетъ три степени свободы. Пользуясь методомъ Лагранжа, мы должны будемъ получить шесть уравненій равновѣсія. Взявъ для каждой изъ свя-

зей (1), (2), (3) по множителю, мы получимъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{x_1 - x_2}{l} &= 0, \\ Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_3 \frac{y_1 - y_2}{l} &= 0, \\ Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_3 \frac{z_1 - z_2}{l} &= 0, \\ X_2 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{x_2 - x_1}{l} &= 0, \\ Y_2 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \lambda_3 \frac{y_2 - y_1}{l} &= 0, \\ Z_2 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} + \lambda_3 \frac{z_2 - z_1}{l} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

которыя вмѣстѣ съ тремя уравненіями связи составляютъ систему девяти уравненій, посредствомъ которыхъ мы опредѣлимъ шесть координатъ и три множителя.

Эти же самыя уравненія мы получили бы, пользуясь элементарнымъ способомъ, т. е. написавъ, что каждая точка находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенной силы, нормальной реакціи поверхности, по которой скользить точка, и натяженія стержня.

ГЛАВА XIV.

НАЧАЛО ДАЛАМБЕРА; УРАВНЕНІЯ ЛАГРАНЖА.

I. — ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.

288. Формулировка начала Даламбера. — Разсмотримъ матеріальную систему, подчиненную даннымъ связямъ и находящуюся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ. Введя силы связи, мы можемъ разсматривать каждую точку системы, какъ движущуюся свободно подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ и силъ связи. Разсмотримъ точку $M_v(x_v, y_v, z_v)$ системы; пусть m_v будетъ ея масса, X'_v, Y'_v, Z'_v — проекціи результирующей дѣйствующихъ на нее данныхъ силъ и силъ связи. Уравненія движенія этой точки будутъ

$$m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = X'_v, \quad m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} = Y'_v, \quad m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} = Z'_v.$$

Мы можемъ написать ихъ такъ

$$-m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} + X'_v = 0, \quad -m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} + Y'_v = 0, \quad -m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} + Z'_v = 0. \quad (1)$$

Вообразимъ фиктивную силу, имѣющую проекціи

$$-m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2}, \quad -m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2}, \quad -m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2},$$

т. е. фиктивную силу, противоположную вектору, который получится, если умножимъ ускореніе точки M_v на массу m_v этой точки; эта фиктивная сила называется силой инерціи точки M_v . Такимъ образомъ уравненія (1) выражаютъ, что въ каждый моментъ имѣетъ

мѣсто равновѣсія между дѣйствующими на точку M силами, а именно: силами непосредственно приложенными, силами связи и силами инерціи. Мы приходимъ такимъ путемъ къ началу Даламбера (d'Alembert):

Уравненія движенія матеріальной системы получатся, если написать, что въ каждый моментъ имѣеть мѣсто равновѣсія между силами, непосредственно приложенными, силами связи и силами инерціи.

Мы можемъ сказать также, что ^{вслѣдствіе} въ силу существованія связей равновѣсія имѣеть мѣсто между данными силами и силами инерціи.

При помощи этого начала мы можемъ, слѣдовательно, свести вопросъ о составленіи уравненій для задачи изъ динамики къ составленію уравненій для вспомогательной задачи изъ статики.

Коль скоро мы сумѣемъ написать уравненія равновѣсія системы, подчиненной даннымъ связямъ, мы будемъ въ состояніи написать уравненія движенія этой системы, выразивъ, что силы инерціи вмѣстѣ съ дѣйствительно приложенными силами въ каждый моментъ удовлетворяють условіямъ равновѣсія.

Напримѣръ, для равновѣсія твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси Oz , необходимо и достаточно, чтобы сумма моментовъ силъ около этой оси была равна нулю. Поэтому уравненія движенія тѣла получатся, если напишемъ, что сумма моментовъ данныхъ силъ и силъ инерціи около оси Oz равна нулю. Такимъ путемъ мы непосредственно находимъ то самое уравненіе, которое дано въ п. 223.

Если твердый шаръ долженъ катиться по неподвижной плоскости, которой онъ касается въ точкѣ O , то необходимыя и достаточныя условія равновѣсія получатся, если напишемъ, что результирующій моментъ приложенныхъ силъ около точки O равенъ нулю (п. 283). Поэтому уравненія движенія получатся, если выразимъ, что результирующій моментъ около точки O приложенныхъ силъ и силъ инерціи равенъ нулю, и т. д.

Итакъ, уравненія движенія системы безъ тренія можно получить, комбинируя начала Даламбера съ началомъ возможныхъ работъ.

289. Общее уравненіе динамики для системы съ связями безъ тренія. — Разсмотримъ систему n точекъ, которыя имѣють

массы $m_1, m_2, \dots, m_n$, координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ и подчинены данным связям; мы предполагаемъ, что связи безъ трения; онѣ могутъ при этомъ зависѣть отъ времени, напимѣръ, когда одна изъ точекъ должна двигаться по подвижной кривой, движеніе которой предписано напередъ. Точки системы находятся подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ; назовемъ черезъ X_v, Y_v, Z_v проекціи результирующей F_v данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ m_v .

Согласно принципу Даламбера въ каждый моментъ имѣетъ мѣсто равновѣсіе между силами инерціи, непосредственно приложенными силами F_v и силами связи. Поэтому, если мы сообщимъ системѣ произвольное возможное перемѣщеніе, то сумма работъ силъ инерціи, данныхъ силъ и силъ связи равна нулю. Если же сообщенное возможное перемѣщеніе допускается связями, которыя имѣются въ моментъ t , то сумма работъ силъ связи сама по себѣ равна нулю (п. 277); слѣдовательно, сумма работъ силъ инерціи и данныхъ силъ равна нулю.

Назовемъ черезъ $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ составляющія возможнаго перемѣщенія точки m_v , допускаемаго связями, имѣющимися въ моментъ t ; такъ какъ проекціи силы инерціи точки m_v равны

$$-m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2}, \quad -m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2}, \quad -m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2},$$

то имѣемъ уравненіе

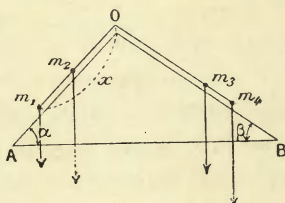
$$\sum_v \left[\left(X_v - m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} \right) \delta x_v + \left(Y_v - m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} \right) \delta y_v + \left(Z_v - m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2} \right) \delta z_v \right] = 0, \quad (2)$$

которое должно удовлетворяться при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связями, имѣющимися въ моментъ t . Это уравненіе называется общимъ уравненіемъ динамики.

290. Примѣръ. — Пусть OA и OB будутъ двѣ прямыя, лежащія въ вертикальной плоскости и составляющія съ горизонтальной прямой соотвѣтственно углы α и β ; по этимъ прямымъ скользятъ безъ тренія тяжелыя матеріальныя точки m_1, m_2, m_3, m_4 , соединенныя между собой невѣсомой, гибкой нерастяжимой и не имѣющей массы нитью

перекинутой въ точкѣ O черезъ безконечно малый блокъ. Требуется найти движеніе системы.

Сила инерціи точки m_1 есть векторъ, направленный по прямой OA ; этотъ векторъ, который считается положительнымъ въ на-



Фиг. 177.

правленіи отъ точки O къ A (фиг. 177), имѣть значеніе $-m_1x''$, если черезъ x обозначимъ разстояніе Om_1 и черезъ x'' — вторую производную отъ x по t .

Такъ какъ при движеніи всѣ точки получаютъ равныя перемѣщенія, то силы инерціи m_2 , m_3 , m_4 также будутъ представлены векторами, изъ коихъ первый направленъ по прямой OA , а вторые два — по прямой BO . Эти векторы имѣютъ значенія $-m_2x''$, $-m_3x''$, $-m_4x''$, считая положительной стороною прямой OB направленіе отъ точки B къ O . Слѣдовательно, положительнымъ направлениемъ ломаной будетъ BOA .

Мы должны выразить, что система будетъ въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ силъ инерціи и вѣсовъ m_1g , m_2g , m_3g , m_4g точекъ m_1 , m_2 , m_3 , m_4 . Единственнымъ „возможнымъ“ перемѣщеніемъ въ данномъ случаѣ является дѣйствительное перемѣщеніе, т. е. скольженіе δx системы. При этомъ перемѣщеніи возможная работа силъ инерціи будетъ

$$-m_1x''\delta x - m_2x''\delta x - m_3x''\delta x - m_4x''\delta x.$$

Работа же силъ тяжести равна

$$m_1g\delta x \sin \alpha + m_2g\delta x \sin \alpha - m_3g\delta x \sin \beta - m_4g\delta x \sin \beta.$$

Чтобы получить уравненіе движенія, мы напишемъ, что сумма этихъ работъ равна нулю; это дастъ намъ уравненіе:

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)x'' = (m_1 + m_2)g \sin \alpha - (m_3 + m_4)g \sin \beta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что x'' есть постоянная величина, т. е. движеніе будетъ равномѣрно ускореннымъ. Если бы выраженіе

$$(m_1 + m_2) g \sin \alpha - (m_3 + m_4) g \sin \beta$$

было равно нулю (это есть условіе дѣйствительнаго равновѣсія системы), то движеніе было бы равномѣрнымъ. Когда одна изъ точекъ проходить черезъ точку O , уравненіе движенія должно быть видоизмѣнено.

291. Приведеніе уравненій движенія къ наименьшему числу. — Разсмотримъ наиболѣе общимъ образомъ систему, имѣющую k степеней свободы. Чтобы получить самое общее возможное перемѣщеніе, допускаемое связями, существующими въ моментъ t , необходимо и достаточно дать k параметрамъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ независимыя варіаціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ (п. 282).

Тогда варіаціи $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$, координатъ различныхъ точекъ системы представляются выраженіями вида

$$\delta x_v = a_{v1} \delta q_1 + a_{v2} \delta q_2 + \dots + a_{vk} \delta q_k,$$

$$\delta y_v = b_{v1} \delta q_1 + b_{v2} \delta q_2 + \dots + b_{vk} \delta q_k,$$

$$\delta z_v = c_{v1} \delta q_1 + c_{v2} \delta q_2 + \dots + c_{vk} \delta q_k.$$

Если подставимъ эти значенія въ общее уравненіе динамики (2), то получимъ уравненіе вида

$$(Q_1 - P_1) \delta q_1 + (Q_2 - P_2) \delta q_2 + \dots + (Q_k - P_k) \delta q_k = 0, \quad (3)$$

или еще:

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= \sum_v (X_v a_{vi} + Y_v b_{vi} + Z_v c_{vi}), \\ P_i &= \sum_v m_v \left(\frac{d^2 x_v}{dt^2} a_{vi} + \frac{d^2 y_v}{dt^2} b_{vi} + \frac{d^2 z_v}{dt^2} c_{vi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k).$$

Такъ какъ уравненіе (3) должно удовлетворяться при любыхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связями въ моментъ t , то оно должно удовлетворяться при любыхъ значеніяхъ варіацій $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$. Поэтому должны имѣть мѣсто уравненія

$$Q_1 - P_1 = 0, \quad Q_2 - P_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_k - P_k = 0. \quad (5)$$

Мы получаемъ такимъ образомъ уравненія движенія системы; число k этихъ уравненій равно числу k степеней свободы системы.

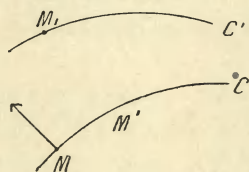
этот же результат мы получимъ, подставивъ въ уравненія равновѣсія (п. 286) вмѣсто X_v, Y_v, Z_v выраженія $X_v = m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2}, Y_v = m_v \frac{d^2 y_v}{dt^2}, Z_v = m_v \frac{d^2 z_v}{dt^2}$.

Мы имѣемъ такимъ образомъ по три уравненія для каждой точки системы, всего $3n$ уравненій, которыя вмѣстѣ съ h уравненіями связи даютъ возможность опредѣлить $3n$ координатъ и h параметровъ λ въ функціи времени. Механическая интерпретація параметровъ λ та же, что и въ случаѣ равновѣсія: сила дѣйствія связи $f_i = 0$ на точку m_v имѣетъ проекціи

$$\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}, \quad \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_v}, \quad \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_v}.$$

На практикѣ этотъ методъ удобенъ лишь въ томъ случаѣ, если число точекъ системы невелико. Если же число ихъ велико, то пользуются другими уравненіями Лагранжа, теорію которыхъ мы дадимъ ниже.

293. Замѣчанія относительно случая, когда связи зависятъ отъ времени. — Слѣдуетъ замѣтить, что въ случаѣ, когда связи зависятъ отъ времени, дѣйствительное перемѣщеніе системы не принадлежитъ къ числу возможныхъ перемѣщеній, допускаемыхъ связями въ моментъ t . Напримѣръ, въ случаѣ, когда точка M должна перемѣщаться по кривой C , обладающей даннымъ движеніемъ (фиг. 178), единственнымъ возможнымъ



Фиг. 178.

перемѣщеніемъ точки M , допускаемымъ связями, существующими въ моментъ t , будетъ перемѣщеніе MM' по кривой C въ томъ положеніи, которое она имѣетъ въ моментъ t . Но въ моментъ $t + dt$ кривая C занимаетъ положеніе C' , и точка M находится уже въ

точкѣ M_1 этой кривой C' ; слѣдовательно, дѣйствительное перемѣщеніе MM_1 вообще не совпадаетъ съ возможнымъ перемѣщеніемъ MM' .

Силой связи будетъ реакція MN кривой, нормальная къ положенію C кривой въ моментъ t . При возможномъ перемѣщеніи MM' , допускаемомъ связью въ моментъ t , элементарная работа этой реакціи равна нулю, при дѣйствительномъ же перемѣщеніи MM_1 она отлична отъ нуля.

Вообще, когда связи выражены уравненіями (6), дѣйствительное перемѣщеніе $dx_1, dy_1, dz_1, \dots, dx_n, dy_n, dz_n$, за время dt удовлетворяетъ соотношеніямъ

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_i}{\partial z_1} dz_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0. \quad (9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, h).$$

Слѣдовательно, дѣйствительное перемѣщеніе не заключается въ числѣ возможныхъ перемѣщеній, которыя допускаются связями въ моментъ t , ибо возможные перемѣщенія должны удовлетворять уравненіямъ (7); сказанное не относится къ тому случаю, когда всѣ частныя производныя $\frac{\partial f_i}{\partial t}$ равны нулю, т. е. когда связи не содержатъ явно времени.

II. — ТЕОРЕМЫ, ВЫТЕКАЮЩІЯ ИЗЪ НАЧАЛА ДАЛАМБЕРА.

294. Примѣненія начала Даламбера. — Общее уравненіе динамики, выведенное изъ начала Даламбера, мы можемъ написать такъ:

$$\sum \left[m_v \left(\frac{d^2 x_v}{dt^2} \delta x_v + \frac{d^2 y_v}{dt^2} \delta y_v + \frac{d^2 z_v}{dt^2} \delta z_v \right) \right] = \sum (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v); \quad (1)$$

знакъ суммы лѣвой части распространяется на всѣ точки системы, а знакъ суммы въ правой части распространяется только на тѣ точки, къ которымъ приложены данныя силы.

Сдѣлавъ нѣкоторыя предположенія относительно связей, мы получимъ частные случаи общихъ теоремъ динамики.

1° Частный случай теоремы о проекциях количествъ движенія. — Предположимъ, что связи системы допускаютъ поступательное перемѣщеніе, параллельное оси Ox . Въ такомъ случаѣ въ числѣ возможныхъ перемѣщеній, допускаемыхъ связями, въ каждый моментъ будетъ поступательное движеніе, параллельное оси Ox ; это перемѣщеніе удовлетворяетъ условіямъ

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_n,$$

$$\delta y_1 = \delta y_2 = \dots = \delta y_n = \delta z_1 = \delta z_2 = \dots = \delta z_n = 0,$$

и уравненіе (1) обратится въ

$$\sum m_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} = \sum X_v, \quad \frac{d}{dt} \sum m_v \frac{dx_v}{dt} = \sum X_v;$$

это уравненіе выражаетъ слѣдующую теорему:

Если связи допускаютъ въ каждый моментъ перемѣщеніе системы, параллельное неподвижной оси, то производная по времени суммы проекцій количествъ движенія на эту ось равна суммѣ проекцій заданныхъ силъ на ту же ось.

Эта теорема есть частный случай общей теоремы о проекциях количествъ движенія. Производная по времени суммы проекцій количествъ движенія на неподвижную ось всегда равна суммѣ проекцій внѣшнихъ силъ на эту ось. Въ общемъ случаѣ проекціи этихъ внѣшнихъ силъ содержатъ и данныя силы и силы связи. Данная же теорема относится къ частнымъ случаямъ, въ которыхъ проекціи внѣшнихъ силъ на ось не содержатъ силъ связи.

2° Частный случай теоремы о моментахъ. — Предположимъ, что связи допускаютъ въ каждый моментъ вращеніе всей системы вокругъ оси Oz . Если обозначимъ это элементарное вращеніе черезъ $\delta\theta$, то

$$\delta x_v = -y_v \delta\theta, \quad \delta y_v = x_v \delta\theta, \quad \delta z_v = 0;$$

уравненіе (1) получаетъ тогда слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \sum m_v \left(x_v \frac{d^2 y_v}{dt^2} - y_v \frac{d^2 x_v}{dt^2} \right) &= \frac{d}{dt} \sum m_v \left(x_v \frac{dy_v}{dt} - y_v \frac{dx_v}{dt} \right) \\ &= \sum (x_v Y_v - y_v X_v). \end{aligned}$$

Если связи допускаютъ въ каждый моментъ вращательное перемѣщеніе системы вокругъ неподвижной оси, то производная по времени суммы моментовъ количествъ движенія около этой оси равна суммѣ моментовъ данныхъ силъ около той же оси.

Замѣтимъ еще, что эта теорема представляетъ собой частный случай теоремы о моментахъ количествъ движенія въ томъ смыслѣ, что въ нее входятъ вмѣсто внѣшнихъ силъ только данныя силы.

295. Частный случай теоремы живыхъ силъ. — Предположимъ, наконецъ, что связи не зависятъ отъ времени. Тогда въ числѣ перемѣщений, допускаемыхъ связями, въ каждый моментъ находится и дѣйствительное перемѣщеніе dx_v, dy_v, dz_v , и мы можемъ подставить въ уравненіе (1) dx_v, dy_v, dz_v вмѣсто $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$. Мы получимъ такимъ образомъ уравненіе

$$\sum m_v \left(\frac{d^2 x_v}{dt^2} dx_v + \frac{d^2 y_v}{dt^2} dy_v + \frac{d^2 z_v}{dt^2} dz_v \right) = \sum (X_v dx_v + Y_v dy_v + Z_v dz_v)$$

или

$$d \sum \frac{mv^2}{2} = \sum (X_v dx_v + Y_v dy_v + Z_v dz_v).$$

Слѣдовательно:

Если связи не зависятъ отъ времени, то дифференціалъ половины живой силы системы равенъ суммѣ элементарныхъ работъ данныхъ силъ.

Это частный случай теоремы живыхъ силъ.

Если же, напротивъ, связи зависятъ отъ времени, то дѣйствительное перемѣщеніе системы не принадлежитъ къ числу перемѣщений, допускаемыхъ связями въ моментъ t , какъ мы видѣли въ п. 293. Когда мы примѣняемъ въ этомъ случаѣ теорему живыхъ силъ, то работа силъ соотвѣтственныхъ связей отлична отъ нуля, какъ мы показали уже на примѣрѣ (п. 293).

III. — УРАВНЕНІЯ ЛАГРАНЖА

296. Голономныя системы. — Выше (п. 291, уравненія (5)) мы дали общія уравненія движенія произвольной системы съ k степенями свободы.

Для такъ называемыхъ голономныхъ системъ эти уравненія можно получить значительно болѣе простымъ способомъ.

Система, имѣющая k степеней свободы, называется голономной, если ея геометрическая конфигурація въ моментъ t опредѣляется численными значеніями k параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, между которыми связи не устанавливаютъ никакихъ соотношеній. Въ этомъ случаѣ координаты x, y, z произвольной точки системы суть функціи этихъ параметровъ. Въ общемъ случаѣ, когда связи зависятъ отъ времени, выраженія координатъ какой-нибудь точки системы содержать явно время и будутъ вида

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \\ y &= \psi(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \\ z &= \omega(q_1, q_2, \dots, q_k, t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Количества $q_1, q_2, \dots, q_k$ могутъ быть названы координатами системы, такъ какъ достаточно въ каждый моментъ знать численные значенія этихъ количествъ, чтобы положенія всѣхъ точекъ системы были опредѣлены.

Обычно встрѣчающіяся системы въ большинствѣ голономны.

Точка, которая должна двигаться по неподвижной поверхности, представляетъ собой голономную систему, такъ какъ координаты этой точки могутъ быть выражены въ функціи двухъ количествъ q_1 и q_2 . Точка M , движущаяся на поверхности

$$(S) \quad f(x, y, z, t) = 0,$$

которая измѣняется въ зависимости отъ времени t , тоже составляетъ голономную систему, потому что координаты точки M всегда могутъ быть выражены въ функціи двухъ параметровъ q_1, q_2 и времени t такимъ образомъ, что, если дать переменнѣй t численное значеніе и измѣнять параметры q_1 и q_2 , точка M опишетъ поверхность S .

Твердое тѣло, вращающееся около неподвижной точки, есть голономная система, такъ какъ положеніе тѣла опредѣляется численными значеніями трехъ Эйлеровыхъ угловъ θ, φ, ψ , какъ мы видѣли въ п. 228. Очевидно, что координаты любой точки тѣла могутъ быть выражены конечнымъ образомъ въ функціи отъ θ, φ, ψ .

Совершенно свободное твердое тѣло есть голономная система съ шестью степенями свободы, такъ какъ его положеніе опредѣ-

ляется численными значениями шести координат: прямоугольными координатами точки O тѣла относительно трехъ неподвижныхъ осей $O_1x_1y_1z_1$ и тремя Эйлеровыми углами, опредѣляющими положеніе связаннаго съ тѣломъ трехграннаго угла $Oxyz$ относительно неподвижнаго трехграннаго угла $O_1x_1y_1z_1$.

Система, связи которой могутъ быть выражены соотношеніями между координатами ея точекъ $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$, какъ въ п. 292, есть голономная система: дѣйствительно, мы можемъ на безконечное множество ладовъ ввести k параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ опредѣляемыхъ k вспомогательными уравненіями

$$f_{h+1}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = q_1,$$

$$f_{h+2}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = q_2,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$f_{h+k}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = q_k,$$

гдѣ $h+k=3n$, и, разрѣшивъ относительно $3n$ координатъ систему h уравненій связи и k вспомогательныхъ уравненій, опредѣляющихъ параметры $q_1, q_2, \dots, q_k$, мы получимъ такимъ образомъ координаты точекъ системы въ функции отъ $q_1, q_2, \dots, q_k, t$.

Напротивъ, твердый шаръ, который долженъ катиться и вѣрѣться по неподвижной плоскости, не есть голономная система, такъ какъ мы имѣемъ здѣсь систему съ тремя степенями свободы, и невозможно опредѣлить положеніе шара численными значениями трехъ параметровъ: чтобы выразить, что шаръ катится и вѣртится на плоскости, нужно написать, что три составляющія скорости точки касанія суть нули, и это даетъ намъ неинтегрирующіяся дифференціальныя условія между шестью параметрами, опредѣляющими положеніе свободнаго твердаго тѣла.

Точно такъ же велосипедъ, который долженъ катиться по неподвижной плоскости, не есть голономная система.

297. Уравненія Лагранжа для голономной системы безъ тренія. — Вообразимъ голономную систему безъ тренія, въ которой координаты x, y, z любой точки выражаются въ функции k независимыхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ посредствомъ формулы вида (1). Наиболѣе общее возможное перемѣщеніе, допускаемое связями въ моментъ t , мы получимъ, сообщивъ параметрамъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ произвольныя варіаціи $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$; координаты x, y, z полу-

чать соотвѣтственные варіаціи

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k, \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k.\end{aligned}$$

При движеніи переменныя $x, y, z, q_1, q_2, \dots, q_k$, измѣняясь вмѣстѣ съ t , суть функціи отъ t ; ихъ первыя и вторыя производныя по t мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ $x', y', z', q'_1, q'_2, \dots, q'_k, x'', y'', z'', \dots$. Подставимъ предыдущія выраженія варіацій $\delta x, \delta y, \delta z$ въ общее уравненіе динамики [п. 289, уравненіе (2)], которое мы напомнимъ, придерживаясь только-что указанныхъ обозначеній, въ видѣ

$$\Sigma [(X - mx'') \delta x + (Y - my'') \delta y + (Z - mz'') \delta z] = 0, \quad (2)$$

при чемъ знакъ суммы распространяется на всѣ точки системы; положивъ для сокращенія

$$\begin{aligned}P_a &= \Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_a} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_a} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_a} \right), \\ Q_a &= \Sigma \left(X \frac{\partial x}{\partial q_a} + Y \frac{\partial y}{\partial q_a} + Z \frac{\partial z}{\partial q_a} \right),\end{aligned}$$

мы получимъ уравненіе вида

$$(P_1 - Q_1) \delta q_1 + (P_2 - Q_2) \delta q_2 + \cdots + (P_k - Q_k) \delta q_k = 0. \quad (3)$$

Такъ какъ это уравненіе должно удовлетворяться при любыхъ значеніяхъ варіацій $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$, то оно распадается на k уравненій

$$P_a - Q_a = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, k).$$

Преобразуемъ количества P_a слѣдующимъ образомъ; мы можемъ написать:

$$\begin{aligned}P_a &= \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q_a} + y' \frac{\partial y}{\partial q_a} + z' \frac{\partial z}{\partial q_a} \right) \\ &\quad - \Sigma m \left(x' \frac{d \frac{\partial x}{\partial q_a}}{dt} + y' \frac{d \frac{\partial y}{\partial q_a}}{dt} + z' \frac{d \frac{\partial z}{\partial q_a}}{dt} \right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$P_a = \frac{d}{dt} \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'_a} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'_a} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'_a} \right) - \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_a} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_a} + z' \frac{\partial z'}{\partial q_a} \right).$$

Пусть теперь T будет половина живой силы системы

$$2T = \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Въ силу соотношений (4) T есть функция переменныхъ $q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k, t$; мы видимъ, что суммы, входящія въ выражение P_a , соответственно равны $\frac{\partial T}{\partial q'_a}$ и $\frac{\partial T}{\partial q_a}$. Мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$P_a = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a},$$

такъ что уравненія движенія будутъ вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a \quad (a = 1, 2, \dots, k). \quad (5)$$

Это уравненія Лагранжа*). Какъ видимъ, для того, чтобы написать ихъ, достаточно знать половину живой силы T въ функции параметровъ q и ихъ производныхъ q' . Какъ мы уже говорили, половина живой силы T называется также кинетической энергіей или энергіей скорости.

Замѣчаніе I. — Изъ уравненій (4) видно, что выраженіе T содержитъ вторыя степени производныхъ $q'_1, \dots, q'_k$; слѣдовательно, уравненія (5) представляютъ собой дифференціальныя уравненія второго порядка относительно параметровъ q ; если мы въ состояніи проинтегрировать ихъ, то они дадутъ намъ эти параметры въ функции времени t и $2k$ произвольныхъ постоянныхъ. Такимъ образомъ, изученіе движенія голономной системы, имѣющей k степеней свободы, приводится къ интегрированію системы k дифференціальныхъ уравненій второго порядка.

Замѣчаніе II. — Если связи не зависятъ отъ времени, то мы можемъ распорядиться такъ, чтобы выраженія (1) координатъ

*) Они обыкновенно называются уравненіями Лагранжа второго рода. *Прим. перев.*

какой-либо точки системы въ функции отъ параметровъ q не содержали явно времени t . Тогда $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$, и уравненія (4) показываютъ, что выраженіе T представляетъ собою квадратичную форму производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$.

298. Вычисленіе количествъ Q_a . — Вообще для вычисленія количествъ Q_a нужно составить выраженіе суммы возможныхъ работъ данныхъ силъ при самомъ общемъ перемѣщеніи, допускаемомъ связями въ моментъ t , потому что эта сумма есть

$$Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_k \delta q_k.$$

Но, чтобы получить выраженіе одного изъ количествъ Q_a , достаточно разсмотрѣть возможное перемѣщеніе, которое получится, если мы оставимъ постоянными t и всѣ параметры q , кромѣ параметра q_a , которому дадимъ варіацію δq_a ; тогда сумма работъ данныхъ силъ будетъ равна $Q_a \delta q_a$.

299. Случай, когда существуетъ силовая функція. — Когда проекціи X_v, Y_v, Z_v данныхъ силъ суть частныя производныя по координатамъ x_v, y_v, z_v нѣкоторой функции $U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t)$, могущей содержать t , то количества Q_a принимаютъ замѣчательный видъ, благодаря чему они могутъ быть вычисляемы непосредственно. Въ этомъ случаѣ мы можемъ при помощи уравненій (1) выразить U въ функции отъ $q_1, q_2, \dots, q_k, t$, и тогда

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = \sum_v \left(\frac{\partial U}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial y_v} \frac{\partial y_v}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial z_v} \frac{\partial z_v}{\partial q_a} \right).$$

Но, согласно предположенію,

$$X_v = \frac{\partial U}{\partial x_v}, \quad Y_v = \frac{\partial U}{\partial y_v}, \quad Z_v = \frac{\partial U}{\partial z_v},$$

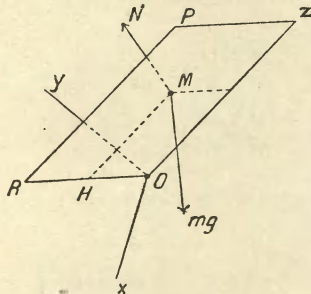
поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial q_a} = \sum_v \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_a} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_a} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_a} \right) = Q_a.$$

Уравненія Лагранжа будутъ тогда вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_a} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_a} = \frac{\partial U}{\partial q_a}.$$

300. Примѣръ. — Изучить движеніе тяжелой точки, которая должна скользить безъ тренія по плоскости P , проходящей черезъ неподвижную ось Oz и вращающейся вокругъ этой оси съ постоянной угловой скоростью ω . — Въ качествѣ координатныхъ осей возьмемъ ось Oz , перпендикулярную къ ней ось Oy въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ ось Oz (фиг. 179), и горизонтальную ось Ox , перпендикулярную къ двумъ предыдущимъ. Слѣдъ движу-



Фиг. 179.

щейся плоскости P по плоскости xOy есть прямая OR , которой уголъ $\theta = xOR$ съ осью Ox измѣняется пропорціонально времени t . Считая время отъ момента, когда $\theta = 0$, имѣемъ $\theta = \omega t$. Такъ какъ точка M должна оставаться на плоскости P , то ея координаты x, y, z удовлетворяють уравненію этой плоскости

$$x \sin \omega t - y \cos \omega t = 0,$$

которое въ данномъ случаѣ представляетъ собой уравненіе связи; связь зависитъ отъ времени.

Чтобы опредѣлить положеніе точки M на плоскости въ моментъ t , достаточно знать координату z и радіусъ-векторъ r проекціи H движущейся точки на плоскость xOy ; это — голономная система, имѣющая двѣ степени свободы; количества z и r играютъ роль двухъ параметровъ q_1 и q_2 общаго случая. Согласно выраженію скорости въ полярныхъ координатахъ, половина живой силы движущейся точки есть

$$T = \frac{m}{2} (r^2 + \omega^2 r^2 + z^2),$$

такъ какъ здѣсь $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. Съ другой стороны, единственной приложенной силой является вѣсъ mg , проекціи котораго на оси Ox, Oy, Oz равны

$$X = 0 \quad Y = -mg \cos \alpha, \quad Z = -mg \sin \alpha,$$

гдѣ α есть уголъ оси Oz съ горизонтомъ¹². Въ разсматриваемомъ случаѣ

существует, следовательно, силовая функция

$$U = -mg (y \cos \alpha + z \sin \alpha).$$

Выразим функцию U при помощи двух выбранных параметров z и r ; замечая, что $y = r \sin \omega t$, мы имеем

$$U = -mg (r \sin \omega t \cos \alpha + z \sin \alpha).$$

Вычислив таким образом функцию U , мы пишем два уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial U}{\partial r}, \end{aligned}$$

или, для обеих части на общего множителя m ,

$$\begin{aligned} z'' - 0 &= -g \sin \alpha, \\ r'' - \omega^2 r &= -g \sin \omega t \cos \alpha. \end{aligned}$$

Первое уравнение интегрируется непосредственно и дает нам

$$z = z_0 + z'_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha, \quad (1)$$

где z_0 и z'_0 суть значения z и z' при $t=0$. Второе уравнение есть линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и последним членом. Общий интеграл такого же уравнения без последнего члена есть $Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$; уравнение имеет, очевидно, частное решение вида $k \sin \omega t$, где $2k\omega^2 = g \cos \alpha$ ¹³⁾; следовательно,

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t \cos \alpha. \quad (2)$$

Для определения постоянных A и B нужно выразить, что при $t=0$ количества r и r' получают заданные начальные значения. Эти формулы вместе с уравнением

$$\theta = \omega t \quad (3)$$

дают три полярные координаты движущейся точки в функции t . Исключив t , мы найдем уравнения траектории. В частности, геометрическое место точки H , т. е. проекция траектории на плоскость xOy , выражается уравнением

$$r = Ae^{\theta} + Be^{-\theta} + \frac{g}{\omega^2} \sin \theta \cos \alpha.$$

Нормальную реакцию N плоскости, или силу связи, можно, если угодно, получить по способу множителей. Напишем по этому методу уравнения

движенія, принимая во вниманіе уравненія связи:

$$mx'' = \lambda \sin \omega t,$$

$$my'' = -mg \cos \alpha - \lambda \cos \omega t,$$

$$mz'' = -mg \sin \alpha.$$

Если мы опредѣлимъ множитель λ , то будемъ знать силу связи, проекціи которой равны $\lambda \sin \omega t$, $-\lambda \cos \omega t$ и 0 . Мы можемъ написать

$$\lambda = m(x'' \sin \omega t - y'' \cos \omega t) - mg \cos \alpha \cos \omega t;$$

но такъ какъ $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, то

$$\begin{aligned} x'' \sin \omega t - y'' \cos \omega t &= \frac{1}{r} (yx'' - xy'') \\ &= -\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (xy' - yx') = -\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \omega) = -2\omega r', \end{aligned}$$

гдѣ остается лишь подставить вмѣсто производной r' ея значеніе, получаемое дифференцированиемъ по t выраженія (2) для r . Такимъ образомъ, найдется множитель λ и, слѣдовательно, также реакція плоскости.

Для упражненія можно вновь получить всѣ эти результаты при помощи теоріи относительнаго движенія.

301. Интегралъ живыхъ силъ. — Когда связи безъ тренія не зависятъ отъ времени, то теорема живыхъ силъ выражается уравненіемъ

$$dT = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz),$$

въ которое входятъ лишь элементарныя работы данныхъ силъ. Въ частности, если эти силы суть производныя силовой функціи U , не содержащей явно времени, то мы имѣемъ интегралъ живыхъ силъ $T = U + h$. Эти теоремы легко доказать также, исходя изъ уравненій Лагранжа.

Когда связи не зависятъ отъ времени, мы можемъ выбрать параметры q такимъ образомъ, чтобы координаты x , y , z выражались функціями этихъ параметровъ, не содержащими явно времени t . При такихъ условіяхъ мы имѣемъ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} dq_k, \quad \dots$$

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_k dq_k,$$

гдѣ количества Q тѣ же, что и въ уравненіяхъ Лагранжа.

Уравнение живыхъ силъ, слѣдовательно, напишется такъ:

$$\frac{d}{dt} T = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \dots + Q_k q'_k.$$

Нижеслѣдующимъ способомъ легко убѣдиться, что это равенство есть слѣдствие изъ уравненій Лагранжа.

Въ интересующемъ насъ случаѣ T есть квадратичная форма относительно производныхъ q' . Съ другой стороны, уравненія Лагранжа даютъ:

$$\begin{aligned} & Q_1 q''_1 + Q_2 q''_2 + \dots + Q_k q''_k \\ &= q'_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) + \dots + q'_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_k} \right) \\ &\quad - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - q'_k \frac{\partial T}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left(q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + \dots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} \right) - q''_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \dots - q''_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} \\ &\quad - q'_1 \frac{\partial T}{\partial q_k} - \dots - q'_k \frac{\partial T}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Въ силу теоремы Эйлера объ однородныхъ функціяхъ

$$q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \dots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} = 2T.$$

Съ другой стороны, такъ какъ T не содержитъ явно времени t , то

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q''_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q'_k} q''_k + \frac{\partial T}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_k} q'_k.$$

Согласно этому мы имѣемъ окончательно

$$Q_1 q'_1 + \dots + Q_k q'_k = \frac{d}{dt} (2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

т. е. уравненіе живыхъ силъ.

Это уравненіе даетъ первый интегралъ во всѣхъ случаяхъ, когда выраженіе $Q_1 dq_1 + \dots + Q_k dq_k$ есть полный дифференціалъ функціи U параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, не содержащій времени t . Тогда

$$dT = dU, \quad T = U + h.$$

Какъ мы уже видѣли, это имѣетъ мѣсто въ частности, когда данныя силы суть производныя силовой функціи

$$U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n),$$

не содержащей явно времени.

Такъ какъ интегралъ живыхъ силъ есть слѣдствіе уравненій Лагранжа, то интегрированіе послѣднихъ можно упростить, замѣняя одно изъ нихъ — наиболѣе сложный — интеграломъ живыхъ силъ.

При этомъ вычисленіи существенно предполагается, что связя не зависятъ отъ времени. Если же это не такъ, то въ измѣненіе живой силы войдетъ работа реакцій, и, кромѣ того, нельзя будетъ предположить, что координаты x, y, z выражены въ функціи параметровъ q посредствомъ формулъ, не содержащихъ явно t .

302. Примѣры. — Уравненія Лагранжа могутъ быть примѣнены къ составленію уравненій всѣхъ задачъ, которыя мы разработали раньше; это очень хорошее упражненіе, которое облегчается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ большинствѣ этихъ задачъ половина живой силы T была вычислена въ функціи параметровъ q_α и q'_α . Мы рассмотримъ два примѣра.

1° Движеніе тяжелаго тѣла вращенія, подвѣшеннаго въ одной точкѣ своей оси. — Мы будемъ пользоваться обозначеніями п. 238. Положеніе системы опредѣляется тремя Эйлеровыми углами θ, φ, ψ , которые здѣсь будутъ служить независимыми параметрами q_1, q_2, q_3 ; для половины живой силы мы нашли выраженіе

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2,$$

$$2T = A(\psi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2) + C(\psi' \cos \theta + \varphi')^2,$$

а для силовой функціи

$$U = -Mg\xi_1 = -Mg\xi \cos \theta,$$

гдѣ ξ есть константа. Уравненія движенія будутъ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi}.$$

Напишемъ второе и третье уравненія, которыя получаютъ особенно простой видъ, такъ какъ ни T , ни U не зависятъ отъ φ и ψ . Имѣемъ

$$\frac{d}{dt} [C(\psi' \cos \theta + \varphi')] = 0,$$

$$\frac{d}{dt} [A\psi' \sin^2 \theta + C(\psi' \cos \theta + \varphi') \cos \theta] = 0;$$

отсюда мы получаемъ два первыхъ интеграла

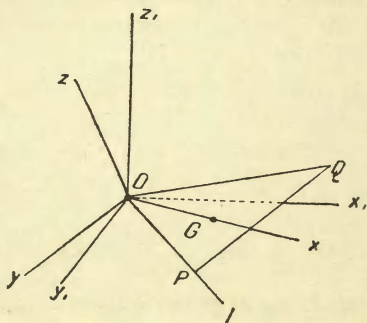
$$\left. \begin{aligned} \psi' \cos \theta + \varphi' &= r_0, \\ A\psi' \sin^2 \theta + C(\psi' \cos \theta + \varphi') \cos \theta &= K, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

изъ которыхъ первый есть интегралъ $r = r_0$, а второй дается теоремой о моментахъ около оси Oz_1 . Затѣмъ мы замѣняемъ первое изъ уравненій Лагранжа. т. е. уравненіе относительно θ , интеграломъ живыхъ силъ

$$T - U = h,$$

и находимъ такимъ образомъ тѣ самыя три уравненія, которыя мы получили въ п. 238, какъ слѣдствія изъ общихъ теоремъ.

2° Безконечно тонкая однородная пластинка OPQ массы $2m$ имѣетъ форму равнобедреннаго треугольника, боковая сторона котораго равна $2a\sqrt{3}$. Вершина O неподвижна, вершина P должна скользить безъ тренія по горизонтальной окружности съ центромъ въ точкѣ O . Изучить движеніе пластинки; найти въ частности, каковы должны быть начальныя условія для того, чтобы



Фиг. 180.

уголъ пластинки съ горизонтомъ оставался постояннымъ (фиг. 180). Пластинка представляетъ собою твердое тѣло, въ которомъ точка O остается неподвижной. Возьмемъ три неподвижныя оси Ox, y, z , и направимъ ось Oz , вертикально вверхъ. Затѣмъ возьмемъ въ качествѣ осей $Oxyz$, связанныхъ съ тѣломъ, перпендикуляръ Ox къ сторонѣ PQ , прямую Oy , параллельную

ей, и перпендикуляр Oz к пластинкѣ. Въ силу симметріи, оси Ox и Oz , очевидно, служатъ главными осями инерціи пластинки для точки O , а потому ось Oy является третьей главной осью для точки O . Три Эйлеровыхъ угла здѣсь будутъ слѣдующіе: во-первыхъ, уголъ ψ есть уголъ x_1OP , потому что сѣченіе OI плоскости xOy плоскостью x_1Oy_1 здѣсь есть прямая OP ; далѣе, угломъ φ здѣсь служитъ уголъ IOx или POx , отсчитываемый въ положительную сторону вокругъ оси Oz , слѣдовательно,

$$\varphi = -\frac{\pi}{6};$$

наконецъ, θ здѣсь есть уголъ z_1Oz , т. е. уголъ пластинки съ горизонтальной плоскостью.

Положеніе системы зависитъ отъ двухъ параметровъ ψ и θ . Согласно общимъ формуламъ п. 228, въ которыхъ нужно положить $\sin \varphi = -1/2$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, составляющія p , q , r мгновеннаго вращенія по неподвижнымъ осямъ выразятся такъ:

$$p = -\frac{1}{2} \psi' \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \theta',$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi' \sin \theta + \frac{1}{2} \theta',$$

$$r = \psi' \cos \theta.$$

Живая сила тѣла равна

$$2T = A p^2 + B q^2 + C r^2,$$

гдѣ A , B , C суть моменты инерціи треугольника OPQ вокругъ трехъ осей Ox , Oy , Oz ; такъ какъ $z=0$ для всѣхъ элементовъ пластинки, имѣющихъ массу dm , то

$$A = \int y^2 dm, \quad B = \int x^2 dm, \quad C = \int (x^2 + y^2) dm,$$

Простое вычисленіе даетъ:

$$A = ma^2, \quad B = 9ma^2, \quad C = A + B = 10ma^2.$$

Слѣдовательно,

$$2T = ma^2 [3\theta'^2 + (7 + 3 \cos^2 \theta) \psi'^2 + 4\sqrt{3} \psi' \theta' \sin \theta].$$

Съ другой стороны, координата ζ_1 центра тяжести пластинки (точки пересѣченія G медіанъ) равна одной трети координаты точки Q :

$$\zeta_1 = a \sin \theta;$$

такъ какъ единственной приложенной силой является вѣсъ, то существуетъ силовая функція $U = -2mg\zeta_1$, или

$$U = -2mga \sin \theta.$$

Составивъ такимъ образомъ выражения T и U , мы можемъ написать два уравненія движенія

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Второе изъ этихъ уравненій имѣетъ простой видъ, потому что выражения T и U не содержатъ ψ ; имѣемъ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \text{const.},$$

т. е.

$$(7 + 3 \cos^2 \theta) \psi' + 2 \sqrt{3} \sin \theta \dot{\theta} = k; \quad (3)$$

такъ какъ связи не зависятъ отъ времени, то вмѣсто перваго изъ уравненій Лагранжа мы можемъ взять интегралъ живыхъ силъ

$$T - U = \text{const.}$$

или, развернувъ,

$$3 \dot{\theta}^2 + (7 + 3 \cos^2 \theta) \dot{\psi}^2 + 4 \sqrt{3} \sin \theta \dot{\psi} \dot{\theta} = h - \frac{4g}{a} \sin \theta. \quad (4)$$

Два уравненія (3) и (4) даютъ углы θ и ψ въ функции отъ t . Уравненіе (3) имѣетъ простой смыслъ: какъ нетрудно убѣдиться, оно выражаетъ, что сумма моментовъ количествъ движенія около оси Oz_1 есть величина постоянная; это обусловливается тѣмъ, что внѣшнія силы, т. е. вѣсъ, реакція точки O и нормальная реакція окружности, по которой скользитъ точка P , пересѣкаютъ ось Oz_1 или параллельны ей.

Исключивъ $\dot{\psi}$ изъ двухъ уравненій (3) и (4), мы находимъ

$$\dot{\theta}^2 = \frac{(ah - 4g \sin \theta)(7 + 3 \cos^2 \theta) - ak^2}{a(9 + 21 \cos^2 \theta)} = \varphi(\theta),$$

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)}};$$

изслѣдованіе этого уравненія представляетъ нѣкоторую аналогію съ изслѣдованіемъ, развитымъ нами въ п. 238 по вопросу о движеніи тяжелаго тѣла вращенія, подвѣшеннаго въ точкѣ оси. Если положимъ $\sin \theta = u$, уравненіе обратится въ

$$u'^2 = \frac{1 - u^2}{a(30 - 21u^2)} [(ah - 4gu)(10 - 3u^2) - ak^2]; \quad (5)$$

здѣсь первый множитель остается существенно положительнымъ или равнымъ нулю, потому что значеніе u заключается между -1 и $+1$. Перемен-

ная u , имѣя начальное значеніе u_0 , можетъ принимать лишь тѣ значенія, которыя даютъ полиному

$$f(u) = (ah - 4gu)(10 - 3u^2) - ak^2 \quad (6)$$

положительное значеніе или обращаютъ его въ нуль.

Мы не будемъ останавливаться на подробностяхъ различныхъ случаевъ, которые могутъ здѣсь представиться.

Стационарное движеніе для параметра θ . — Въ предыдущей задачѣ требуется еще найти, при какихъ начальныхъ условіяхъ уголъ θ остается постояннымъ во время движенія. Если при движеніи системы одинъ изъ параметровъ, отъ которыхъ зависитъ положеніе системы, остается постояннымъ, то говорятъ, что движеніе есть движеніе стационарное для этого параметра. Въ нашемъ примѣрѣ движеніе должно быть стационарнымъ для параметра θ .

Такъ какъ параметръ θ остается равнымъ своему начальному значенію θ_0 , то его производныя θ' и θ'' постоянно равны нулю; въ начальный моментъ имѣемъ, слѣдовательно, $\theta'_0 = 0$. Другія условія мы можемъ получить по слѣдующему общему методу, который состоитъ въ томъ, что мы исходимъ изъ самыхъ уравненій движенія (2). Нужно написать, что эти уравненія удовлетворяются значеніями $\theta = \theta_0$, $\theta' = \theta'' = 0$. Развернувъ выраженія, входящія въ составъ уравненій и отбросивъ члены, содержащіе θ' и θ'' , мы получимъ:

$$2\sqrt{3}\psi'' \sin \theta_0 + 3 \cos \theta_0 \sin \theta_0 \psi'^2 = -\frac{2g}{a} \cos \theta_0,$$

$$(7 + 3 \cos^2 \theta_0) \psi'' = 0.$$

Второе уравненіе даетъ намъ $\psi'' = 0$, $\psi = \omega$, гдѣ ω есть постоянная. Подставивъ эти значенія въ первое, мы получимъ уравненіе

$$\cos \theta_0 \left(3\omega^2 \sin \theta_0 + \frac{2g}{a} \right) = 0,$$

которое допускаетъ двоякое рѣшеніе: мы можемъ положить $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ и

взять произвольное значеніе для ω , либо же можно взять $\theta_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$ и

$$\omega = \pm \sqrt{-\frac{2g}{3a \sin \theta_0}}. \quad (7)$$

Въ каждомъ изъ этихъ рѣшеній уголъ θ остается постояннымъ и равенъ θ_0 , а ψ' есть постоянная, равная ω : движеніе пластинки есть равномерное вращеніе вокругъ оси Oz_1 . Чтобы реализовать первое рѣшеніе, нужно въ начальный моментъ поставить пластинку вертикально и пустить ее въ движеніе, при чемъ количества $\theta'_0 = 0$, и количество ψ'_0 могутъ имѣть произвольныя значенія. Чтобы реализовать второе рѣшеніе,

нужно дать пластинкѣ начальное положеніе, при которомъ $\sin \theta_0 < 0$, т. е. такое, чтобы пластинка была подъ плоскостью x, Oy_1 , и привести въ движеніе пластинку такимъ образомъ, чтобы выполнялось равенство $\theta'_0 = 0$, и чтобы количество ψ'_0 имѣло значеніе ω , опредѣляемое уравненіемъ (7).

Эти результаты можно получить также, если будемъ искать равновѣсіе пластинки относительно системы осей, вращающихся вокругъ оси Oz , съ постоянной угловой скоростью ω .

IV. — МАЛЫЯ ДВИЖЕНІЯ ГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНІЯ УСТОЙЧИВАГО РАВНОВѢСІЯ.

303. Устойчивость равновѣсія. — Разсмотримъ голономную матеріальную систему, связи которой не зависятъ отъ времени и осуществлены безъ тренія; предположимъ, что положеніе этой системы опредѣляется k независимыми параметрами $q_1, q_2, \dots, q_k$, и что данныя силы суть производныя силовой функціи $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$. Мы знаемъ (п. 284), что равенствами

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

выражаются необходимыя и достаточныя условія равновѣсія.

Эти равенства суть условія необходимыя, но недостаточныя для того, чтобы функція U представляла максимумъ или минимумъ.

Если при нѣкоторомъ положеніи системы функція U есть максимумъ, то это есть положеніе устойчиваго равновѣсія.

Эту теорему, формулированную Лагранжемъ, Леженъ-Дирхле строго доказалъ слѣдующимъ образомъ.

Мы всегда можемъ предположить, что значенія параметровъ, соотвѣтствующія положенію равновѣсія, суть

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dots, \quad q_k = 0,$$

и что при этихъ значеніяхъ $U=0$, такъ какъ въ опредѣленіе функціи U входитъ произвольное постоянное слагаемое. Равновѣсіе называется устойчивымъ, если мы, сообщивъ системѣ произвольное очень малое отклоненіе отъ положенія равновѣсія и давъ различнымъ точкамъ очень малыя начальныя скорости, получимъ движеніе, въ теченіе котораго система очень мало отклоняется отъ поло-

женія равновѣсія. Выразимъ это точно. Пусть ε будетъ напередъ заданное сколь угодно малое положительное число; равновѣсіе будетъ устойчивымъ, если мы можемъ указать такое достаточно малое положительное число $\eta < \varepsilon$, что параметры $q_1, q_2, \dots, q_k$ во все время движенія будутъ по абсолютной величинѣ оставаться меньше числа ε , коль скоро ихъ начальныя значенія и начальныя скорости различныхъ точекъ будутъ по абсолютной величинѣ меньше числа η .

Давъ это опредѣленіе, допустимъ, что при значеніяхъ $q_1=0, q_2=0, \dots, q_k=0$ величина U равна нулю и есть максимумъ. Такъ какъ U есть максимумъ, то мы можемъ взять столь малое положительное число ε , что при всѣхъ системахъ значеній параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, заключенныхъ между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ или равныхъ этимъ предѣламъ, значеніе U останется отрицательнымъ и, слѣдовательно, значеніе $-U$ положительнымъ, исключая одну только систему значеній

$$q_1=q_2=\dots=q_k=0,$$

для которой $U=0$. Дадимъ, въ частности, одной изъ переменныхъ, наприимѣръ, параметру q_r одно изъ предѣльныхъ значеній $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, и затѣмъ будемъ давать другимъ всѣ возможные значенія, заключенныя между $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ или равныя этимъ предѣламъ. Пусть P_r будетъ наименьшее значеніе функции $-U$, соотвѣтствующее этимъ значеніямъ параметровъ. P_r есть положительное число, отличное отъ нуля: дѣйствительно, такъ какъ $q_r = \pm \varepsilon$, то U не можетъ обратиться въ нуль, какія бы значенія мы ни дали другимъ параметрамъ между указанными предѣлами. Существуютъ, слѣдовательно, k положительныхъ чиселъ $P_1, P_2, \dots, P_k$, которыя получаются, если послѣдовательно будемъ полагать параметры $q_1, q_2, \dots, q_k$ равными $\pm \varepsilon$. Назовемъ черезъ P наименьшее изъ этихъ чиселъ; тогда должны имѣть мѣсто соотношенія

$$-U \geq P, \quad U + P \leq 0,$$

коль скоро одинъ изъ параметровъ станетъ равнымъ $\pm \varepsilon$, а прочіе будутъ заключаться между $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ или будутъ равны этимъ предѣламъ.

Теперь отклонимъ систему отъ ея положенія равновѣсія, сообщивъ параметрамъ значенія $q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0$, заключенныя между $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, и дадимъ точкамъ системы начальныя скорости $v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0$.

Къ движенію, которое возникаетъ при этомъ, можно примѣнить теорему живыхъ силъ, такъ какъ здѣсь связи безъ тренія; такимъ образомъ

$$\sum \frac{mv^2}{2} = U + \sum \frac{mv_0^2}{2} - U_0.$$

Такъ какъ $U_0 < 0$, то количество $\sum \frac{mv_0^2}{2} - U_0$ будетъ положительнымъ; кромѣ того, оно можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ, потому что оно непрерывно и обращается въ нуль, когда всѣ начальныя скорости и всѣ начальныя значенія параметровъ равны нулю. Точнѣе говоря: мы можемъ указать положительное число $\eta < \varepsilon$ столь малое, что

$$\sum \frac{mv_0^2}{2} - U_0 < P,$$

коль скоро значенія $q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0, v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0$ по абсолютной величинѣ будутъ меньше, чѣмъ η .

Уравненіе живыхъ силъ теперь даетъ намъ:

$$\sum \frac{mv^2}{2} < U + P.$$

Ни одинъ изъ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, исходя изъ начального значенія, заключеннаго между $\pm \varepsilon$, не можетъ достигнуть этихъ предѣльных значеній во все время движенія, ибо въ противномъ случаѣ сумма $U + P$, а съ нею и живая сила стала бы отрицательной, что невозможно.

Предѣлы скоростей. — Мы можемъ также предуказывать верхніе предѣлы скоростей за все время движенія. Дѣйствительно, такъ какъ значенія параметровъ заключены между предѣлами $\pm \varepsilon$, то $U < 0$, вслѣдствіе чего

$$\sum mv^2 < 2P.$$

Поэтому, если мы назовемъ черезъ v_i скорость точки m_i , то

$$m_i v_i^2 < 2P, \quad v_i < \sqrt{\frac{2P}{m_i}}.$$

Этотъ предѣлъ будетъ сколь угодно малъ, когда число ε получить достаточно малое значеніе, такъ какъ предѣлъ числа P будетъ равенъ нулю, если ε стремится къ нулю.

Замѣчаніе. — При доказательствѣ существенно предполагается, что функція U зависитъ отъ всѣхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$. Если бы она зависѣла, напримѣръ, только отъ параметровъ q_1, q_2, q_3 и имѣла бы максимумъ, равный нулю, при значеніяхъ

$$q_1=0, \quad q_2=0, \quad q_3=0, \quad q_4=a_4, \quad \dots, \quad q_k=a_k,$$

гдѣ $a_4, \dots, a_k$ суть произвольныя постоянныя, то этимъ значеніямъ также соотвѣствовало бы положеніе равновѣсія, но равновѣсіе не было бы устойчивымъ. Дѣйствительно, если мы очень мало отклонимъ систему отъ этого положенія равновѣсія и дадимъ точкамъ очень малыя скорости, то получимъ движеніе, въ которомъ параметры q_1, q_2, q_3 будутъ очень мало отличаться отъ нуля; но такъ какъ параметры $q_4, \dots, q_k$ не входятъ въ функцію U , то предыдущее разсужденіе къ нимъ непримѣнимо, и поэтому можетъ случиться, что эти параметры не будутъ оставаться достаточно близкими къ значеніямъ $a_4, \dots, a_k$.

304. Малыя движенія. — Представимъ себѣ систему, связанную, будучи независимы отъ времени, осуществлены безъ тренія и положеніе которой зависитъ отъ k геометрическихъ параметровъ. Предположимъ, что непосредственно приложенныя силы суть производныя силовой функціи $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$, зависящей отъ всѣхъ переменныхъ q , и что эта функція имѣетъ значеніе максимумъ, равное нулю, когда всѣ переменныя q обращаются въ нули. Соотвѣствующее положеніе равновѣсія будетъ устойчивымъ; поставимъ себѣ задачей изучить малыя движенія системы около этого положенія. При этихъ малыхъ движеніяхъ параметры $q_1, q_2, \dots, q_k$ остаются очень малыми; скорости также остаются очень малыми; слѣдовательно, производныя $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$ остаются очень малыми, такъ какъ живая сила есть существенно положительная однородная функція второго измѣренія отъ производныхъ q' .

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ простѣйшихъ случаевъ, когда система имѣетъ одну или двѣ степени свободы.

1° Система имѣетъ одну степень свободы. Тогда $k=1$; положеніе системы зависитъ отъ параметра q , который въ положеніи равновѣсія предполагается равнымъ нулю. Половина живой силы T , какъ однородная функція второго измѣренія отъ производной q' , будетъ вида

$$T = q'^2 f(q) = q'^2 \left[f(0) + \frac{q}{1} f'(0) + \dots \right],$$

при чемъ мы допускаемъ, что функція $f(q)$ можетъ быть развернута въ строку по формулѣ Маклорена. Предположимъ, что первый членъ $f(0)$ отличенъ отъ нуля; въ такомъ случаѣ онъ будетъ положительнымъ, ибо при очень маломъ значеніи q выраженіе T имѣетъ знакъ перваго члена, т. е. количества $f(0)$, а живая сила есть существенно положительная величина. Положивъ $f(0) = a$, пишемъ

$$T = aq'^2 + T_1,$$

гдѣ значеніе T_1 очень мало сравнительно съ первымъ членомъ, потому что T_1 содержитъ множитель qq'^2 .

По предположенію силовая функція U есть функція параметра q , которая имѣетъ максимумъ, равный нулю при $q = 0$. Слѣдовательно, положивъ $U = F(q)$ и развернувъ $F(q)$ по формулѣ Маклорена, мы видимъ, что числа $F(0)$ и $F'(0)$ равны нулю, а $F''(0)$ вообще будетъ отрицательнымъ числомъ. Положивъ

$$\frac{1}{2} F''(0) = -a, \quad a > 0,$$

мы можемъ написать

$$U = -aq^2 + U_1,$$

гдѣ U_1 есть сумма слѣдующихъ членовъ строки Маклорена. Поэтому членъ U_1 , содержащій множителя q^3 , очень малъ сравнительно съ членомъ $-aq^2$.

Въ нашемъ приближенномъ вычисленіи мы пренебрегаемъ въ уравненіяхъ членами, содержащими T_1 и U_1 , и принимаемъ, что

$$T = aq'^2, \quad U = -aq^2.$$

Такъ какъ $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$, то Лагранжево уравненіе движенія

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q},$$

обратится въ

$$aq'' = -aq, \quad q'' = -r^2 q, \quad (1)$$

гдѣ $\frac{a}{a} = r^2$. Общій интегралъ этого уравненія есть

$$q = \lambda \cos (rt + \varphi),$$

гдѣ λ и φ обозначаютъ двѣ произвольныя постоянныя, которыя определяются по начальному положенію q_0 и начальной скорости q'_0 . Периодъ колебанія системы равенъ $\frac{2\pi}{r}$; константа r , имѣющая физическое значеніе, очевидно не зависитъ отъ выбора параметра q .

Такъ какъ при $t=0$ начальныя значенія q и q' равны a_1 и b_1 , то

$$q = a_1 \cos rt + \frac{b_1}{r} \sin rt.$$

Если въ другомъ опытѣ начальныя значенія q и q' равны a_2 и b_2 , то имѣемъ точно такъ же

$$q = a_2 \cos rt + \frac{b_2}{r} \sin rt.$$

Наконецъ, если въ третьемъ опытѣ начальныя значенія q и q' равны $a_1 + a_2$ и $b_1 + b_2$, то соотвѣтствующее выраженіе q равно

$$q = (a_1 + a_2) \cos rt + \frac{b_1 + b_2}{r} \sin rt,$$

т. е. суммѣ двухъ предыдущихъ. Это обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что уравненіе движенія — линейное и составляетъ то, что называется наложеніемъ (superposition) малыхъ движеній.

Замѣчаніе. — Въ частныхъ случаяхъ иногда бываетъ, что $a=0$, и строка, которая получается для функціи U , начинается членомъ, содержащимъ q^4 ; мы не будемъ здѣсь разсматривать этого случая, который читатель можетъ найти въ курсѣ Аппелля (т. II, гл. XXIV).

Примѣръ. — Прямой однородный цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ полукругъ радіуса a , лежитъ своей образующей O на неподвижной горизонтальной плоскости, на которой онъ можетъ катиться безъ скользянія. Изучить малыя колебанія цилиндра около его положенія равновѣсія.

За плоскость чертежа примемъ перпендикулярное къ образующимъ сѣченіе, проведенное черезъ центръ тяжести G , и пусть Ox будетъ слѣдъ этой плоскости на данной неподвижной плоскости. При движеніи полукругъ A_0OB_0 катится по оси Ox . Въ положеніи равновѣсія A_0OB_0 прямая OG_0 , соединяющая точку касанія съ центромъ тяжести G_0 , вертикальна (фиг. 181). Пусть AHB будетъ сосѣднее положеніе, HC — радіусъ, проведенный въ точку касанія H , G — новое положеніе центра тяжести, u — уголъ HCG , на который цилиндръ повернулся относительно своего положенія равновѣсія. Обозначимъ черезъ b разстояніе GC центра тяжести отъ середины S діаметра AB и черезъ M массу цилиндра. Ординату η точки G найдемъ, проектируя HCG на вертикаль Oy :

$$\eta = a - b \cos u.$$

Единственная приложенная сила, вѣсъ Mg , есть производная функціи

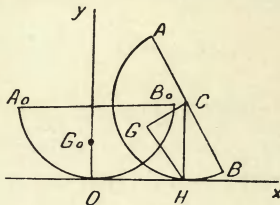
$$U = -Mg\eta = -Mg(a - b \cos u) + \text{const.},$$

которая имѣетъ максимумъ въ положеніи равновѣсія $u=0$. Распорядимся константой такимъ образомъ, чтобы при равновѣсіи функція U обращалась въ нуль: тогда

$$U = Mgb(\cos u - 1) = -Mgb \frac{u^2}{2} + \dots,$$

при чемъ функція U разложена по возрастающимъ степенямъ перемѣнной u .

Съ другой стороны, такъ какъ H есть мгновенный центръ вращенія плоской фигуры, то скорости различныхъ точекъ таковы же, какъ если бы цилиндръ вращался съ угловою скоростью u' вокругъ образующей точки H ;



Фиг. 181.

слѣдовательно, называя черезъ I моментъ инерціи цилиндра вокругъ этой образующей H , мы получимъ для живой силы выраженіе

$$2T = Iu'^2. \quad (1)$$

Но I измѣняется вмѣстѣ съ u ; чтобы вычислить моментъ инерціи I , назовемъ черезъ I_C и I_G моменты инерціи вокругъ прямыхъ, проведенныхъ параллельно образующимъ черезъ точки C и G ; тогда (п. 195):

$$I = I_G + M\overline{HG}^2 = I_G + M(a^2 + b^2 - 2ab \cos u),$$

$$I_C = I_G + Mb^2;$$

вычтя второе равенство изъ перваго и замѣтивъ, что I_C есть половина момента инерціи однороднаго цилиндра вращенія вокругъ его оси, $I_C = M \frac{a^2}{4}$, имѣемъ

$$I = M \left(\frac{5}{4} a^2 - 2ab \cos u \right).$$

Подставивъ это значеніе I въ уравненіе (1), мы получимъ T въ функціи отъ u . Мы должны взять для I значеніе, соответствующее значенію $u=0$, т. е. моментъ инерціи I_0 вокругъ образующей O ; это дастъ намъ приближенное значеніе T_0 живой силы T :

$$2T_0 = I_0 u'^2 = M \left(\frac{5}{4} a^2 - 2ab \right) u'^2.$$

Уравнение Лагранжа, выражающее малые колебания, представится теперь такъ:

$$\left(\frac{5}{4} a^2 - 2ab \right) u'' = -gbu.$$

Периодъ t_1 поднаго безконечно малаго колебанія будетъ

$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{5a^2 - 8ab}{4gb}}. \quad (2)$$

Въ этомъ выраженіи нужно вычислить b въ функціи отъ a ; мы сдѣлаемъ это непосредственно, примѣняя теоремы Гюльдена. Объемъ $\frac{4}{3} \pi a^3$ тѣла вращенія полукруга $АНВ$ вокругъ оси AB равенъ $\frac{\pi a^2}{2} 2\pi b$; слѣдовательно,

$$b = \frac{4a}{3\pi}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{15\pi - 32} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Конечное движеніе системы легко получить, примѣняя теорему живыхъ силъ:

$$T = U + h.$$

2° Система имѣетъ двѣ степени свободы. Положеніе системы зависитъ тогда отъ двухъ параметровъ p и q ; половина живой силы T есть квадратичная форма производныхъ p' и q' двухъ параметровъ:

$$T = Ap'^2 + 2Bp'q' + Cq'^2,$$

гдѣ коэффициенты A , B , C суть функціи отъ p и q , удовлетворяющія неравенствамъ

$$AC - B^2 > 0, \quad A > 0, \quad C > 0,$$

такъ какъ живая сила должна быть положительной при любыхъ значеніяхъ p' и q' . Коэффициенты A , B , C можно вообще развернуть въ ряды по возрастающимъ положительнымъ степенямъ параметровъ p и q ; предположимъ, что при $p = q = 0$ (положеніе равновѣсія) значенія коэффициентовъ A и C равны постояннымъ a и c , отличнымъ отъ нуля и существенно положительнымъ. Мы можемъ написать:

$$A = a + A_1, \quad B = b + B_1, \quad C = c + C_1,$$

при чемъ величины A_1 , B_1 , C_1 при равновѣсіи обращаются въ нуль. Имѣемъ теперь

$$T = ap'^2 + 2bp'q' + cq'^2 + T_1;$$

здѣсь членъ T_1 при малыхъ колебаніяхъ около положенія равновѣ-

сія очень малъ сравнительно съ совокупностью трехъ первыхъ членовъ; кромѣ того,

$$ac - b^2 > 0, \quad a > 0, \quad c > 0.$$

Съ другой стороны, такъ какъ силовая функція $U(p, q)$, выраженная въ функціи двухъ параметровъ, имѣетъ значеніе максимумъ, равное нулю, при $p = q = 0$, то ея разложеніе въ рядъ по возрастающимъ положительнымъ степенямъ количествъ p и q начинается членами второго порядка:

$$U(p, q) = -(ap^2 + 2\beta pq + \gamma q^2) + U_1,$$

гдѣ константы a, β, γ удовлетворяють неравенствамъ

$$a\gamma - \beta^2 > 0, \quad a > 0, \quad \gamma > 0.$$

Составимъ приближенныя уравненія малыхъ движеній, пренебрегая въ уравненіяхъ Лагранжа членами, содержащимися въ T_1 и U_1 . Мы получимъ такимъ образомъ систему двухъ совокупныхъ линейныхъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} ap'' + bq'' &= -(ap + \beta q), \\ bp'' + cq'' &= -(\beta p + \gamma q). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для интегрированія этихъ уравненій положимъ

$$p = \lambda \cos(rt + \varphi), \quad q = \mu \cos(rt + \varphi), \quad (4)$$

гдѣ λ, μ, r, φ суть постоянныя. Имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(a - ar^2) + \mu(\beta - br^2) &= 0, \\ \lambda(\beta - br^2) + \mu(\gamma - cr^2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

откуда, по исключеніи отношенія $\frac{\lambda}{\mu}$, получается уравненіе второй степени относительно r^2 :

$$(a - ar^2)(\gamma - cr^2) - (\beta - br^2)^2 = 0. \quad (6)$$

Это уравненіе даетъ для r^2 два положительныхъ вещественныхъ значенія, какъ въ томъ можно убѣдиться, подставивъ вмѣсто r^2 числа

$$0, \quad \frac{a}{a} \quad \text{и} \quad \frac{\gamma}{c}, \quad +\infty,$$

которыя даютъ знаки:

$$+, \quad - \quad \text{и} \quad -, \quad +.$$

Итакъ, мы найдемъ для r два положительныхъ значенія r_1 и r_2 . При каждомъ изъ этихъ значеній система уравненій (5) приводится

къ одному уравненію, напримѣръ, къ первому. Мы можемъ такимъ образомъ положить, при $r = r_1$,

$$\frac{\lambda}{\beta - br_1^2} = \frac{\mu}{ar_1^2 - \alpha} = k_1,$$

откуда, давая постоянной q значеніе q_1 , получимъ слѣдующее частное рѣшеніе:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= k_1 (\beta - br_1^2) \cos(r_1 t + q_1), \\ q_1 &= k_1 (ar_1^2 - \alpha) \cos(r_1 t + q_1); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

второй корень r_2 также даетъ частное рѣшеніе:

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= k_2 (\beta - br_2^2) \cos(r_2 t + q_2), \\ q_2 &= k_2 (ar_2^2 - \alpha) \cos(r_2 t + q_2); \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

сложивъ значенія p_1 и p_2 и значенія q_1 и q_2 , мы получимъ общіе интегралы уравненій (3):

$$\left. \begin{aligned} p &= k_1 (\beta - br_1^2) \cos(r_1 t + q_1) + k_2 (\beta - br_2^2) \cos(r_2 t + q_2), \\ q &= k_1 (ar_1^2 - \alpha) \cos(r_1 t + q_1) + k_2 (ar_2^2 - \alpha) \cos(r_2 t + q_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

съ четырьмя произвольными постоянными k_1 , k_2 , q_1 и q_2 .

Мы видимъ, что движеніе около положенія равновѣсія можно разсматривать, какъ результирующее движеніе, происходящее отъ сложения двухъ простыхъ колебаній (7) и (8), періоды которыхъ равны соотвѣтственно $\frac{2\pi}{r_1}$ и $\frac{2\pi}{r_2}$.

Примѣръ. — Два безконечно тонкихъ тяжелыхъ однородныхъ стержня OA и OB , равные между собой, имѣютъ каждый массу m , длину $2a$ и сочленены въ точкѣ A ; первый движется вѣкругъ своего конца O , который остается неподвижнымъ, а конецъ B второго стержня скользитъ безъ тренія по неподвижной горизонтальной оси Oz ; изучить малыя колебанія около положенія устойчиваго равновѣсія.

Направимъ ось Ox вертикально внизъ и ось Oy перпендикулярно къ двумъ предыдущимъ. Проекціей точки A на плоскость xOy будетъ точка C ; положеніе системы зависить отъ двухъ параметровъ: угла θ прямыхъ OA и OC и угла φ прямой OC съ осью Ox (фиг. 182). Система, очевидно, находится въ равновѣсїи подѣ дѣйствіемъ вѣса, когда углы θ и φ равны нулю. Тогда оба стержня свисаютъ по направленію оси Ox .

Пусть q будетъ масса единицы длины одного изъ стержней, такъ что вся масса каждаго стержня будетъ $m = 2aq$; разсмотримъ два матеріальныхъ элемента длины dr и массы $dm = qdr$, лежащихъ въ точкахъ M и M_1 стерж-

ней на разстояніяхъ $OM = BM_1 = r$ отъ концовъ O и B ; проекціей этихъ двухъ элементовъ на плоскость xOy служить точка P ; ихъ координаты равны

$$(M) \quad x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta,$$

$$(M_1) \quad x_1 = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y_1 = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z_1 = (4a - r) \sin \theta.$$

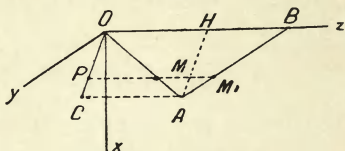
Отсюда мы находимъ квадраты скоростей обѣихъ точекъ:

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2,$$

$$v_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + (16a^2 - 8ar) \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2.$$

Живыя силы стержней равны соотвѣтственно:

$$\int v^2 dm = \rho \int_0^{2a} v^2 dr, \quad \int v_1^2 dm = \rho \int_0^{2a} v_1^2 dr.$$



Фиг. 182.

Имѣемъ непосредственно:

$$\rho \int_0^{2a} r^2 dr = \frac{4}{3} ma^2 \quad \rho \int_0^{2a} (16a^2 - 8ar) dr = 8ma^2.$$

Живая сила всей системы, т. е. сумма живыхъ силъ обоихъ стержней, равна, слѣдовательно:

$$2T = \frac{8ma^2}{3} [(1 + 3 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2].$$

Съ другой стороны, абсцисса центра тяжести системы есть абсцисса середины отрезка OC :

$$\xi = a \cos \theta \cos \varphi;$$

слѣдовательно, силовая функція есть

$$U = 2mga \cos \theta \cos \varphi + \text{const.}$$

гдѣ константа выбирается такимъ образомъ, чтобы при $\theta = \varphi = 0$ функція U обратилась въ нуль:

$$U = 2mga (-1 + \cos \theta \cos \varphi).$$

Чтобы изучить малыя колебанія около положенія равновѣсія, мы должны въ выраженіи для T разложить коэффициенты по возрастающимъ степенямъ угла θ , сохраняя лишь постоянные члены, и затѣмъ въ выраженіи для U разложить въ рядъ $\cos \theta \cos \varphi$, сохраняя лишь члены второго порядка; мы беремъ такимъ образомъ

$$T = \frac{4ma^2}{3}(4\theta'^2 + \varphi'^2),$$

$$U = -mga(\theta^2 + \varphi^2).$$

Приближенныя уравненія малыхъ колебаній будутъ:

$$\frac{16a}{3}\theta'' = -g\theta, \quad \frac{4a}{3}\varphi'' = -g\varphi;$$

отсюда непосредственно получаютъ уравненія

$$\theta = \lambda \cos \left(\frac{t}{4} \sqrt{\frac{3g}{a}} + \alpha \right), \quad \varphi = \mu \cos \left(\frac{t}{2} \sqrt{\frac{3g}{a}} + \beta \right)$$

съ четырьмя постоянными λ , μ , α и β . Такимъ образомъ каждому параметру соответствуетъ простое колебаніе; періоды этихъ колебаній равны

$$t_1 = 8\pi \sqrt{\frac{a}{3g}}, \quad t_2 = 4\pi \sqrt{\frac{a}{3g}}.$$

Эти періоды соизмѣрны одинъ съ другимъ: $t_1 = 2t_2$; въ виду этого исключительнаго обстоятельства можно сказать, что движеніе въ цѣломъ имѣетъ періодъ t_1 ; дѣйствительно, по истеченіи промежутка t_1 параметры θ , φ и ихъ производныя θ' , φ' каждый разъ принимаютъ одни и тѣ же значенія.

V. — КАНОНИЧЕСКІЯ УРАВНЕНІЯ.

305. Преобразование Пуассона и Гамильтона. — Для самой общей задачи динамики голономныхъ системъ безъ тренія уравненія могутъ быть составлены въ формѣ, указанной Лагранжемъ (п. 297). Преобразование, начатое Пуассономъ и завершенное Гамильтономъ, даетъ возможность написать эти уравненія въ формѣ, которая содержитъ лишь частныя производныя одной только функции и потому весьма удобна для теоретическихъ изысканій.

Разсмотримъ голономную систему, положеніе которой зависитъ отъ k координатъ $q_1, q_2, \dots, q_k$.

Напишемъ уравненія Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_v} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_v} = Q_v, \quad \frac{dq_v}{dt} = q'_v \quad (v = 1, 2, \dots, k). \quad (1)$$

Они опредѣляютъ параметры q и ихъ производныя q' въ функціи времени t .

Вмѣсто переменныхъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ введемъ, по Пуассону, новыя переменныя

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \dots, \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial q_k'}. \quad (2)$$

Эти уравненія, которыми опредѣляются переменныя p , линейны относительно производныхъ $q_1', \dots, q_k'$. Ихъ нужно рѣшить относительно $q_1', q_2', \dots, q_k'$ и подставить найденныя выраженія въ уравненія (1). Посмотримъ, во что обратятся уравненія (1) послѣ такой замѣны переменныхъ.

Оставимъ переменную t безъ измѣненія и дадимъ переменнымъ q и p бесконечно малыя, произвольныя и независимыя приращенія δq и δp . Въ результатѣ производныя q' получаютъ приращенія $\delta q'$, опредѣляемые при помощи соотношеній (2), которыя предполагаются разрѣшенными относительно переменныхъ q' .

Функція T , зависящая отъ переменныхъ q и q' , получить при этомъ вариацию

$$\delta T = \sum_v \frac{\partial T}{\partial q_v} \delta q_v + \sum_v \frac{\partial T}{\partial q_v'} \delta q_v',$$

или, въ силу соотношеній (2),

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_v} \delta q_v + \sum p_v \delta q_v';$$

положивъ

$$K = \sum p_v q_v' - T \text{ и, слѣдовательно, } \delta K = \sum q_v' \delta p_v + \sum p_v \delta q_v' - \delta T,$$

мы найдемъ, что

$$\delta K = - \sum \frac{\partial K}{\partial q_v} \delta q_v + \sum q_v' \delta p_v.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ первое выраженіе полного дифференціала δK .

Предположимъ, съ другой стороны, что количество K выражено посредствомъ новой системы переменныхъ q_v, p_v . Когда, при постоянномъ значеніи t , эти переменныя получаютъ произвольныя вариации δq_v и δp_v , то

$$\delta K = \sum \frac{\partial K}{\partial q_v} \delta q_v + \sum \frac{\partial K}{\partial p_v} \delta p_v.$$

Это новое выражение вариации δK должно быть тождественно съ предыдущимъ при любыхъ значеніяхъ вариаций δq и δp ; поэтому имѣемъ:

$$-\frac{\partial T}{\partial q_v} = \frac{\partial K}{\partial q_v}, \quad q'_v = \frac{\partial K}{\partial p_v} \quad (v=1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Въ этихъ уравненіяхъ частныя производныя отъ половины живой силы T взяты въ предположеніи, что T выражено посредствомъ переменныхъ q и q' , а частныя производныя отъ количества K — въ предположеніи, что оно выражено посредствомъ переменныхъ q и p . Въ силу соотношеній (3) уравненія Лагранжа (1) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dp_v}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_v} = Q_v, \quad \frac{dq_v}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_v} \quad (v=1, 2, \dots, k). \quad (4)$$

Эти уравненія перваго порядка опредѣляютъ переменныя p и q въ функціи времени.

306. Каноническія уравненія. — Въ дальнѣйшемъ мы вездѣ предполагаемъ, что составляющія по осямъ координатъ приложенныя силы, отличныя отъ силъ связи, суть частныя производныя по координатамъ функціи U отъ координатъ и времени. Въ частности это условіе выполняется, если приложенныя силы суть производныя силовой функціи, но въ этомъ случаѣ функція U содержитъ лишь координаты, но не время.

Такъ какъ координаты различныхъ точекъ системы суть функціи параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, и, можетъ быть, времени, то при нашемъ предположеніи U есть функція параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ и t , не содержащая буквъ p_v , такъ что частныя производныя $\frac{\partial U}{\partial p_v}$ равны нулю; кромѣ того, $Q_v = \frac{\partial U}{\partial q_v}$. Теперь положимъ

$$K - U = H; \quad (5)$$

тогда

$$\frac{\partial K}{\partial p_v} = \frac{\partial H}{\partial p_v}, \quad \frac{\partial K}{\partial q_v} - Q_v = \frac{\partial H}{\partial q_v},$$

и уравненія (4) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_v}, \quad \frac{dp_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_v} \quad (v=1, 2, \dots, k). \quad (6)$$

Это такъ называемыя каноническія уравненія движенія, предложенныя Гамильтономъ. Они составляютъ систему $2k$ уравненій перваго порядка, опредѣляющихъ количества $q_1, q_2, \dots, q_k$ и $p_1, p_2, \dots, p_k$ въ функции отъ времени и отъ $2k$ произвольныхъ постоянныхъ.

Вотъ практическое правило для полученія этихъ уравненій. Вычисливъ выраженіе T , какъ въ случаѣ уравненій Лагранжа, въ функции отъ параметровъ q и производныхъ q' , мы пишемъ уравненія (2)

$$p_v = \frac{\partial T}{\partial q'_v},$$

которыя разрѣшаемъ относительно производныхъ $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$. Полученныя значенія мы подставляемъ въ функцію

$$K = p_1 q'_1 + \dots + p_k q'_k - T,$$

и, наконецъ, полагаемъ

$$H = K - U.$$

Теперь остается лишь написать каноническія уравненія (6).

307. Частный случай, когда связи не зависятъ отъ времени. — Если связи, которымъ подчинена система, не зависятъ отъ времени, то мы всегда можемъ выбрать въ качествѣ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$ такія количества, чтобы выраженія координатъ различныхъ точекъ системы въ функции этихъ параметровъ не содержали явно времени t . Тогда T будетъ квадратичной формой производныхъ q' (п. 297, замѣчаніе II), и, согласно теоремѣ объ однородныхъ функціяхъ,

$$\sum q'_v \frac{\partial T}{\partial q'_v} = 2T, \quad \sum p_v q'_v = 2T,$$

такъ какъ $p_v = \frac{\partial T}{\partial q'_v}$. Въ этомъ случаѣ функція K обращается въ

$$K = \sum p_v q'_v - T = 2T - T = T,$$

и

$$H = K - U = T - U.$$

308. Случай, когда связи не зависятъ отъ времени, и существуетъ силовая функція; интегралъ живыхъ силъ. — Къ

предположениямъ, сдѣланнымъ въ предыдущемъ пунктѣ, мы присоединимъ предположеніе, что существуетъ силовая функція, т. е. что U зависитъ отъ координатъ различныхъ точекъ, а не отъ времени. Такъ какъ мы предположили, что выраженія координатъ въ функціи параметровъ q не содержатъ времени t , то U становится функціей параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, не содержащей времени t . Въ этомъ случаѣ теорема живыхъ силъ приводитъ къ интегралу

$$T - U = h \quad \text{или} \quad H = h.$$

Это же самое легко вывести изъ каноническихъ уравненій. Дѣйствительно, въ разсматриваемомъ случаѣ функція $H = T - U$ не содержитъ явно времени; она выражается лишь при помощи переменныхъ q и p . Во время движенія эти переменныя q и p суть функціи времени; черезъ ихъ посредство H становится функціей времени, и

$$\frac{dH}{dt} = \sum_v \left(\frac{\partial H}{\partial q_v} \frac{dq_v}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_v} \frac{dp_v}{dt} \right);$$

но, согласно каноническимъ уравненіямъ, каждый членъ суммы въ правой части равенъ нулю, и потому во время движенія

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad H = h.$$

309. Примѣръ. Разсмотримъ въ плоскихъ полярныхъ координатахъ r и θ движеніе точки подѣйствіемъ центральной силы F , функціи отъ r . Координаты r и θ здѣсь играютъ роль параметровъ q_1 и q_2 и

$$T = \frac{m}{2} (r'^2 + r^2 \theta'^2),$$

$$U = \int F dr = \varphi(r).$$

Мы должны положить

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = mr', \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = mr^2 \theta',$$

и затѣмъ рѣшить эти уравненія относительно r' и θ' :

$$r' = \frac{p_1}{m}, \quad \theta' = \frac{p_2}{mr^2}.$$

Такъ какъ связи не зависятъ отъ времени, то T есть однородная функція отъ r' и θ' ; положивъ поэтому

$$H = T - U,$$

гдѣ функція T выражена черезъ p_1 и p_2 , найдемъ

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \right) - \varphi(r).$$

Уравненія движенія будутъ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{p_1}{m}, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p_2}{mr^2}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{1}{m} \frac{p_2^2}{r^3} + \varphi'(r), & \frac{dp_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Эти четыре уравненія опредѣляютъ r , θ , p_1 , p_2 въ функціи времени t ; послѣднее уравненіе показываетъ, что p_2 есть величина постоянная: взявъ $p_2 = mC$, мы увидимъ, что второе уравненіе даетъ

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C;$$

это есть интегралъ площадей. Интегралъ живыхъ силъ, какъ легко показать, здѣсь будетъ

$$H = h.$$

Наконецъ, можно замѣтить, что, исключивъ изъ перваго и третьяго уравненія p_1 и подставивъ mC вмѣсто p_2 , мы получимъ уравненіе

$$m \frac{dr}{dt^2} = m \frac{C^2}{r^3} + \varphi'(r),$$

которое выражаетъ движеніе по радіусу-вектору.

ГЛАВА XV.

УДАРЫ. — ТЕОРЕМА КАРНО.

310. Общее уравнение теории ударовъ. — Въ теорию ударовъ можно ввести принципъ, аналогичный принципу Даламбера, изъ котораго онъ вытекаетъ, какъ слѣдствіе.

Разсмотримъ матеріальную точку, имѣющую массу m и координаты x, y, z ; обозначимъ черезъ x', y', z' производныя координаты по времени, т. е. проекціи скорости точки. Предположимъ, что на точку m дѣйствуетъ ударъ въ теченіе безконечно короткаго времени $t_1 - t_0$. Пусть v_0 и v_1 будутъ скорости точки въ моменты t_0 и t_1 , а w — геометрическая разность векторовъ v_0 и v_1 :

$$(w) = (v_0) - (v_1).$$

Этотъ векторъ называется потерянной скоростью точки. Если обозначимъ черезъ x'_0, y'_0, z'_0 и x'_1, y'_1, z'_1 проекціи скоростей v_0 и v_1 , то проекціи потерянной скорости w будутъ

$$x'_0 - x'_1, \quad y'_0 - y'_1, \quad z'_0 - z'_1.$$

Векторъ mw есть потерянное количество движенія; его проекціи равны

$$m(x'_0 - x'_1), \quad m(y'_0 - y'_1), \quad m(z'_0 - z'_1),$$

или также

$$- \Delta(mx'), \quad - \Delta(my'), \quad - \Delta(mz'),$$

если черезъ $\Delta(mx')$ обозначимъ приращеніе $m(x'_1 - x'_0)$.

Этотъ векторъ mw будетъ играть здѣсь такую же самую роль, какъ сила инерціи въ принципъ Даламбера. Дѣйствительно,

уравнения, выражающія для точки, находящейся подъ дѣйствіемъ ударовъ, теорему о проекціяхъ количествъ движенія, можно написать такъ:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta(mx') + \Sigma a &= 0, \\ -\Delta(my') + \Sigma b &= 0, \\ -\Delta(mz') + \Sigma c &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ Σa , Σb , Σc обозначаютъ суммы проекцій ударовъ, приложенныхъ къ точкѣ. Мы можемъ интерпретировать эти уравненія такъ: потерянное количество движенія и удары, приложенные къ точкѣ, взаимно уравниваются. Поэтому, если мы сообщимъ точкѣ какое-нибудь возможное перемѣщеніе δx , δy , δz , то сумма работъ потеряннаго количества движенія и ударовъ равна нулю:

$$-\Delta(mx') \delta x - \Delta(my') \delta y - \Delta(mz') \delta z + \Sigma (a \delta x + b \delta y + c \delta z) = 0.$$

Теперь представимъ себѣ систему со связями безъ тренія и предположимъ, что въ теченіе безконечно короткаго промежутка времени $t_1 - t_0$ на нее дѣйствуютъ данные удары $P_1, P_2, \dots, P_n$, проекціи которыхъ равны

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots$$

Мы можемъ разсматривать каждую точку системы, какъ свободную, при томъ условіи, что къ ней приложены вызванные связями удары, которые производятся въ теченіе промежутка $t_1 - t_0$. Поэтому, если мы сообщимъ различнымъ точкамъ какія-нибудь возможные перемѣщенія, то сумма работъ потерянныхъ количествъ движенія данныхъ ударовъ и ударовъ связи равна нулю.

Допустимъ еще, какъ слѣдствіе изъ опредѣленія связей безъ тренія, что сумма работъ ударовъ связи равна нулю при любомъ возможномъ перемѣщеніи, допускаемомъ связями; слѣдовательно, при такомъ перемѣщеніи сумма работъ потерянныхъ количествъ движенія и данныхъ ударовъ также равна нулю.

Назовемъ черезъ δx , δy , δz какое-либо перемѣщеніе точки x, y, z , допускаемое связями, дѣйствующими въ теченіе промежутка $t_1 - t_0$; свойство, которое мы только-что формулировали, выражается уравненіемъ

$$\Sigma [-\Delta(mx') \delta x - \Delta(my') \delta y - \Delta(mz') \delta z + a \delta x + b \delta y + c \delta z] = 0, \quad (2)$$

въ которое входятъ лишь данные удары (a, b, c), при чемъ знакъ суммы распространяется на всѣ точки системы.

Это уравненіе играетъ въ теоріи ударовъ безъ тренія такую же роль, какъ и общее уравненіе динамики (п. 289). Это уравненіе распадается на столько отдѣльныхъ уравненій, сколько степеней свободы допускаются въ системѣ связями, существующими во время удара.

311. Длительныя связи. — Связи, существующія въ моментъ, когда происходятъ удары, могутъ быть двухъ родовъ: однѣ бываютъ длительными, а другія не имѣютъ этого свойства. Длительными мы называемъ такія связи, которыя, существуя въ моментъ удара, существуютъ и послѣ, такъ что дѣйствительное перемѣщеніе, слѣдующее непосредственно за ударами, допускается этими связями. Напротивъ, недлительныя связи — это такія, которыя существуютъ въ моментъ удара и затѣмъ уже не существуютъ; дѣйствительное перемѣщеніе, слѣдующее непосредственно за ударами, не допускается этими связями.

Въ видѣ примѣра разсмотримъ прямой ударъ двухъ шаровъ. Ударъ вызывается тѣмъ, что шары, первоначально изолированные другъ отъ друга, внезапно приходятъ въ соприкосновеніе; въ систему такимъ образомъ внезапно вводится новая связь. Эта связь будетъ длительной, если шары мягки, потому что тогда они остаются въ соприкосновеніи; связь не будетъ длительной, если шары упруги, потому что въ этомъ случаѣ они сейчасъ же послѣ удара отдѣляются другъ отъ друга.

312. Теорема Карно. — Очевидно, что изъ общаго уравненія (2) можно было бы вывести слѣдствія, аналогичныя тѣмъ, которыя мы въ динамикѣ вывели изъ общаго уравненія динамики. Мы здѣсь ограничимся выводомъ теоремы Карно.

Вообразимъ систему со связями безъ тренія, обладающую извѣстнымъ движеніемъ. Предположимъ, что въ моментъ t мы внезапно вводимъ въ систему новыя связи безъ тренія; тогда произойдетъ столкновеніе или ударъ, продолжающійся бесконечно короткое время $t_1 - t_0$. Въ теченіе этого времени скорости различныхъ точекъ, которыя прежде были равны $v_0, \dots$, обращаются въ $v_1, \dots$. Въ разсматриваемомъ случаѣ заданные удары съ проекціями a, b, c суть нули, потому что единственными ударами, дѣйствующими на

систему, являются тѣ, которые вызываются прежними связями или внезапно введенными. Общее уравненіе (2) здѣсь приметъ слѣдующій видъ:

$$\Sigma [A (mx') \delta x + A (my') \delta y + A (mz') \delta z] = 0; \quad (3)$$

это уравненіе должно удовлетворяться при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связями, существующими во время ударовъ.

Теорема Карно гласить:

Если прежнія и внезапно введенныя связи — длительныя, то потерянная живая сила равна живой силѣ, которой обладала бы система, если бы каждая точка имѣла ту скорость, которую она потеряла.

Дѣйствительно, уравненіе (3), удовлетворяющееся при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ, допускаемыхъ связями, которыя существуютъ въ моментъ ударовъ, въ данномъ случаѣ удовлетворяется при дѣйствительномъ перемѣщеніи, которое слѣдуетъ за ударомъ, такъ какъ связи длительныя.

Но при этомъ дѣйствительномъ перемѣщеніи

$$\delta x = x'_1 dt, \quad \delta y = y'_1 dt, \quad \delta z = z'_1 dt,$$

и уравненіе (3) даетъ

$$\Sigma [A (mx') x'_1 + A (my') y'_1 + A (mz') z'_1] = 0,$$

или, замѣщая количества $A (mx')$, ... ихъ значеніями $m (x'_1 - x'_0)$, ..., имѣемъ:

$$\Sigma m [(x'_1 - x'_0) x'_1 + (y'_1 - y'_0) y'_1 + (z'_1 - z'_0) z'_1] = 0. \quad (4)$$

Съ другой стороны, для скоростей до и послѣ ударовъ и для потерянной скорости w мы имѣемъ выраженія

$$v_0^2 = x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2$$

$$v_1^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2,$$

$$w^2 = (x'_0 - x'_1)^2 + (y'_0 - y'_1)^2 + (z'_0 - z'_1)^2.$$

Легко видѣть, что въ уравненіи (4) коэффициентъ при m равенъ

$$\frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2 + w^2).$$

Это уравнение даетъ, слѣдовательно:

$$\Sigma m (v_1^2 - v_0^2 + w^2) = 0, \quad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m w^2.$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Живая сила $\Sigma m w^2$ называется живой силой потерянныхъ скоростей.

Въ теоріи ударовъ теорема Карно играетъ роль, аналогичную той, которую теорема живыхъ силъ играетъ въ динамикѣ. Теорема Карно вполне опредѣляетъ состояніе скоростей послѣ ударовъ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда связи длительныя и число ихъ таково, что послѣ момента, въ который происходятъ удары, получается полносвязная система.

313. Примѣръ. Балистическій маятникъ. — Въ балистическомъ маятникѣ удары вызываются внезапно введенной связью, которая продолжаетъ дѣйствовать послѣ удара.

Теорема Карно здѣсь имѣетъ мѣсто. Сохранимъ обозначенія п. 266. До удара маятникъ находится въ неподвижномъ состояніи; живая сила всей системы, состоящей изъ маятника и ядра, сводится, слѣдовательно, къ живой силѣ ядра, т. е. къ $m v_0^2$.

Послѣ удара скорость ядра равна $a \omega_1$, такъ какъ угловая скорость маятника равна ω_1 . Слѣдовательно, живая сила системы равна

$$m a^2 \omega_1^2 + M k^2 \omega_1^2.$$

Вычислимъ, наконецъ, живую силу потерянныхъ скоростей. Потерянная скорость ядра равна $v_0 - a \omega_1$, потому что скорости ядра до и послѣ удара имѣютъ одинаковое направленіе; поэтому живая сила потерянной скорости ядра равна $m (v_0 - a \omega_1)^2$. Какая-либо точка m маятника до удара имѣетъ скорость $r \omega_0$, перпендикулярную къ плоскости, проходящей черезъ точку m и ось вращенія; послѣ удара скорость этой точки обратится въ $r \omega_1$ и будетъ имѣть прежнее направленіе. Слѣдовательно, геометрическая разность

$$(w) = (v_0) - (v_1),$$

или потерянная скорость, равна абсолютному значенію количества $r (\omega_0 - \omega_1)$; живая сила, соотвѣтствующая этой потерянной скорости, равна $m r^2 (\omega_0 - \omega_1)^2$. Такимъ образомъ, живая сила

потерянныхъ скоростей точекъ маятника равна $Mk^2(\omega_0 - \omega_1)^2$. Такъ какъ здѣсь въ дѣйствительности $\omega_0 = 0$, то это выраженіе сводится къ $Mk^2\omega_1^2$.

Поэтому, написавъ, что потерянная живая сила равна живой силѣ потерянныхъ скоростей, имѣемъ:

$$mv_0^2 - ma^2\omega_1^2 - Mk^2\omega_1^2 = m(v_0 - a\omega_1)^2 + Mk^2\omega_1^2.$$

Это уравненіе послѣ упрощенія даетъ для угловой скорости ω_1 такое же значеніе, какое мы нашли изъ уравненія (10) въ п. 266.



ГЛАВА XVI.

ПРИТЯЖЕНИЕ; ПОТЕНЦИАЛЬ.

I. — ФОРМУЛА ГРИНА.

314. Преобразование интеграла, взятого по объему, въ интегралъ, взятый по поверхности.— Мы сейчас докажемъ важную формулу, которая часто примѣняется въ механикѣ и математической физикѣ.

Разсмотримъ непрерывную область, для которой въ каждой ея точкѣ $M(x, y, z)$ опредѣлены три функции $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$, однозначныя, непрерывныя и имѣющія частныя производныя перваго порядка. Эти три функции можно представить геометрически, отнеся къ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ области векторъ MW , началомъ котораго служитъ точка M , а проекціями — значенія функции F, G, H въ этой точкѣ.

Разсматриваемая область становится тогда такъ называемымъ полемъ векторовъ. Векторъ W опредѣленъ однозначно въ каждой точкѣ поля; ни въ одной точкѣ поля онъ не обращается въ безконечность и не претерпѣваетъ разрыва; его направленіе вполне опредѣлено въ каждой точкѣ, за исключеніемъ тѣхъ, въ которыхъ векторъ обращается въ нуль.

Теперь рассмотримъ въ полѣ объемъ V , состоящій изъ одной или нѣсколькихъ частей и ограниченный поверхностью S . Обозначимъ черезъ $d\tau$ элементъ объема V , черезъ $d\sigma$ — элементъ поверхности S и черезъ α, β, γ косинусы угловъ осей координатъ съ нормалью MN къ элементу $d\sigma$, направленной во внѣшнее относительно объема V пространство (фиг. 183).

Докажемъ формулу

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) d\tau = \iint_S (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma, \quad (1)$$

въ которой первый интегралъ распространяется на всѣ элементы объема V , а второй—на всѣ элементы поверхности S .

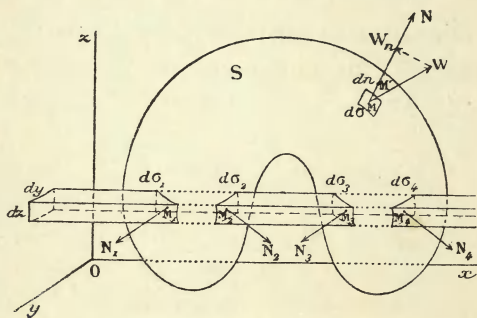
Для доказательства вычислимъ сперва интеграль

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dt;$$

подставивъ $dx dy dz$ вмѣсто dt , мы напомнимъ интеграль такъ:

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy dz = \iiint dy dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx.$$

Будемъ сперва интегрировать по переменнѣй x и съ этой цѣлью найдемъ, между какими предѣлами распространяется интегрирование



Фиг. 183.

по x . Возьмемъ элементъ $dydz$ въ плоскости yz и рассмотримъ призму, въ которой основаніемъ служить этотъ элементъ и въ которой боковыя ребра параллельны оси Ox . Она вырѣжетъ изъ поверхности элементъ $d\sigma_1$, проникая въ нее въ M_1 ; назовемъ черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ косинусы нормали M_1N_1 къ этому элементу, направленной во внѣшнее относительно тѣла пространство. Затѣмъ, выйдя изъ тѣла въ M_2 , призма вырѣжетъ элементъ $d\sigma_2$; назовемъ черезъ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ косинусы направленной во внѣшнее пространство нормали M_2N_2 къ этому элементу. Далѣе, призма входитъ въ тѣло въ M_3 , выходитъ въ M_4 и т. д. Такъ какъ по предположенію разсматриваемый объемъ ограниченъ замкнутой поверхностью, то число точекъ $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ входа и выхода будетъ четнымъ; всѣ элементы $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots$ имѣютъ одинаковую проекцію $dydz$ на плоскость yz .

Пусть $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$ будутъ значенія функции F въ точкахъ $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$; тогда

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = (F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \dots,$$

такъ какъ неопредѣленный интеграль есть F , а интегрировать нужно отъ M_1 до M_2 , затѣмъ отъ M_3 до M_4 , Тройной интеграль обратится, слѣдовательно, въ

$$\int \int dy dz [(F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \dots].$$

Нормаль къ элементу $d\sigma_1$, направленная во внѣшнее пространство, составляетъ съ осью Ox тупой уголъ; его косинусъ, который мы обозначили черезъ a_1 , будетъ отрицательнымъ, и мы имѣемъ, слѣдовательно,

$$dy dz = -a_1 d\sigma_1,$$

такъ какъ количества $dy dz$ и $d\sigma_1$, выражающія площади, будутъ существенно положительными. При элементѣ $d\sigma_2$ внѣшняя нормаль составляетъ съ осью Ox острый уголъ, $a_2 > 0$, и мы имѣемъ

$$dy dz = a_2 d\sigma_2;$$

точно такъ же

$$dy dz = -a_3 d\sigma_3,$$

$$dy dz = a_4 d\sigma_4,$$

$$\dots\dots\dots,$$

Подставивъ эти значенія $dy dz$ въ интеграль, получимъ

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \frac{\partial F}{\partial x} d\tau &= \int \int dy dz (-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - \dots) \\ &= \int \int (+a_1 d\sigma_1 F_1 + a_2 d\sigma_2 F_2 + a_3 d\sigma_3 F_3 + a_4 d\sigma_4 F_4 + \dots) \end{aligned}$$

т. е.

$$\int \int \int_V \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = \int_S a F d\sigma,$$

гдѣ интеграль въ правой части распространяется на всѣ элементы $d\sigma$ поверхности S .

Вотъ два непосредственныхъ приложенія этой формулы.

Положимъ сначала $F = 1$; тогда имѣемъ:

$$0 = \int \int a d\sigma;$$

этотъ результатъ очевиденъ а priori, потому что онъ выражаетъ, что алгебраическая сумма проекцій всѣхъ элементовъ замкнутой поверхности на плоскость равна нулю.

Положивъ затѣмъ $F = x$, получимъ формулу

$$\int \int \int d\tau = V = \int \int \alpha x d\sigma,$$

посредствомъ которой вычисленіе объема приводится къ вычисленію двойного интеграла.

Вернемся теперь къ доказательству формулы (1).

Мы только-что видѣли, что

$$\int \int \int_V \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = \int \int_S \alpha F d\sigma;$$

аналогичное вычисленіе даетъ намъ формулы:

$$\int \int \int_V \frac{\partial G}{\partial y} d\tau = \int \int_S \beta G d\sigma,$$

$$\int \int \int_V \frac{\partial H}{\partial z} d\tau = \int \int_S \gamma H d\sigma.$$

Сложивъ эти формулы почленно, мы получимъ формулу (1).

315. Геометрическая интерпретація. Силовой потокъ.

Расхождение. — Разсмотримъ въ полѣ векторовъ элементъ поверхности $d\sigma$ (фиг. 183), содержащій точку $M(x, y, z)$, и проведемъ къ этому элементу нормаль MN въ опредѣленную сторону; обозначимъ черезъ W_n проекцію на нормаль MN вектора MW , соответствующаго точкѣ M и имѣющаго проекціи F, G, H . Произведение

$$W_n d\sigma$$

называется элементарнымъ потокомъ вектора W сквозь $d\sigma$ въ сторону MN .

Если α, β, γ суть направляющіе косинусы нормали MN , то аналитически

$$W_n = \alpha F + \beta G + \gamma H,$$

и потокъ есть

$$W_n d\sigma = (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma$$

Если мы рассматриваемъ конечную часть S поверхности, имѣющей двѣ стороны, то полнымъ потокомъ вектора сквозь эту по-

верхность въ опредѣленную сторону называется сумма элементарныхъ потоковъ сквозь различные элементы поверхности S ; полный потокъ равенъ, слѣдовательно, интегралу

$$\int \int_S W_n d\sigma$$

или интегралу

$$\int \int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma,$$

взятому по поверхности S .

Въ каждой точкѣ M поля количество

$$E = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе, которое называется расхождениемъ вектора W въ этой точкѣ. Это количество имѣетъ геометрическое значеніе, которое, какъ мы увидимъ ниже, не зависитъ отъ выбора осей. Уравненіе (1), относящееся къ объему V , лежащему въ полѣ, можно написать такъ

$$\int \int \int_V E d\tau = \int \int_S W_n d\sigma;$$

оно выражаетъ полный потокъ сквозь замкнутую поверхность S изнутри наружу въ функции значеній расхождения въ различныхъ точкахъ объема, ограниченного поверхностью S .

Въ частности, если мы приложимъ предыдущую формулу къ бесконечно-малому объему $d\tau$, окружающему точку $M(x, y, z)$ и ограниченному поверхностью s , то первый интегралъ сведется къ одному лишь элементу, и мы получимъ формулу

$$E d\tau = \int \int W_n d\sigma,$$

которая показываетъ, что расхождение E въ точкѣ M имѣетъ значеніе, независящее отъ выбора осей; это значеніе равно потоку сквозь бесконечно малую замкнутую поверхность, окружающую точку M , дѣленному на объемъ, ограничиваемый этой поверхностью.

316. Частный случай, когда для выраженія $Fdx + Gdy + Hdz$ существуетъ интегрирующій множитель. Предположимъ теперь, что существуетъ множитель, который представляетъ собою функцію координатъ x, y, z и отличается тѣмъ свойствомъ, что

произведе́ніе выраже́нія $Fdx + Gdy + Hdz$ на этотъ множитель есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи $\varphi(x, y, z)$. Обозначивъ этотъ множитель черезъ $\frac{1}{\psi(x, y, z)}$, имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi}(Fdx + Gdy + Hdz) &= d\varphi, \\ Fdx + Gdy + Hdz &= \psi d\varphi, \\ (W) \quad F &= \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad G = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad H = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Полагая для сокращенія

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

мы имѣемъ теперь для расхожденія вектора W выраженіе

$$\operatorname{div} W = E = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \psi \Delta \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и формула (1) принимаетъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} &\int \int \int_V \psi \Delta \varphi \, d\tau + \int \int \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau \\ &= \int \int_S \psi \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Правая часть уравненія есть потокъ сквозь поверхность S . Множитель $\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ называется производной функціи φ по внѣшней нормали къ поверхности S и обозначается черезъ $\frac{d\varphi}{dn}$. Чтобы оправдать это названіе, проведемъ въ точкѣ M внѣшнюю нормаль MN (фиг. 183) и возьмемъ на этой нормали точку M' , лежащую на бесконечно маломъ разстояніи $MM' = dn$ отъ точки M . Такъ какъ точка M имѣетъ координаты x, y, z , то координаты точки M' равны $x + \alpha dn, y + \beta dn, z + \gamma dn$. При переходѣ отъ точки M къ M' координаты получаютъ, слѣдовательно, бесконечно малыя приращенія

$$dx = \alpha dn, \quad dy = \beta dn, \quad dz = \gamma dn;$$

съ другой стороны, функція φ получаетъ приращеніе

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

откуда, подставивъ вмѣсто dx , dy , $d\varepsilon$ ихъ значенія, находимъ:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (14).$$

Нашу формулу можно поэтому написать такъ:

$$\left. \begin{aligned} & \int \int \int_V \psi \Delta \varphi \, d\tau \\ & + \int \int \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau = \int \int_S \psi \frac{d\varphi}{dn} \, d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если мы возьмемъ производную функции φ по внутренней нормали, то эта производная будетъ равна по абсолютной величинѣ и противоположна по знаку производной, взятой по внѣшней нормали.

Другой видъ этой формулы. — Въ предыдущей формулѣ переставимъ буквы φ и ψ одну на мѣсто другой и вычтемъ новую формулу изъ предыдущей; мы получимъ

$$\int \int \int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \, d\tau = \int \int_S \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) d\sigma. \quad (3 \text{ bis})$$

Замѣчаніе. — Формулу (2) мы вывели изъ формулы (1); можно, обратно, вывести формулу (1) изъ (2).

Дѣйствительно, въ формулѣ (2) положимъ

$$\psi = F, \quad \varphi = x;$$

имѣемъ $\Delta \varphi = 0$ и

$$\int \int \int_V \frac{\partial F}{\partial x} \, d\tau = \int \int_S \alpha F \, d\sigma.$$

Точно такъ же мы найдемъ и двѣ другія формулы п. 314, положивъ въ формулѣ (2) послѣдовательно

$$\psi = G \quad \text{и} \quad \varphi = y \quad \text{или} \quad \psi = H \quad \text{и} \quad \varphi = z.$$

317. Случай, когда выраженіе $Fdx + Gdy + Hdz$ есть полный дифференціалъ. — Предположимъ, что

$$Fdx + Gdy + Hdz = d\varphi(x, y, z),$$

$$(W) \quad F = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad G = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad H = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Въ этомъ случаѣ проекціи вектора W суть производныя функціи $\varphi(x, y, z)$. Этотъ случай былъ подробно рассмотрѣнъ нами, когда мы изучали силы, допускающія силовую функцію (пп. 75 и 76). Расхожденіе вектора W въ этомъ случаѣ равно

$$E = \Delta\varphi,$$

и общая формула (1) получаетъ слѣдующій видъ:

$$\int \int_V \Delta\varphi d\tau = \int_S \int \frac{d\varphi}{dn} d\sigma, \quad (4)$$

въ чемъ легко убѣдиться, если въ формулахъ (2) и (3) положить $\psi=1$.

II. — ПРИТЯЖЕНІЕ ИЗОЛИРОВАННЫХЪ ТОЧЕКЪ.

318. Ньютоново притяженіе. — Законъ всемірнаго притяженія гласитъ: двѣ матеріальныя точки, имѣющія массы m и m' и находящіяся на разстояніи r одна отъ другой, притягиваютъ другъ друга съ силой

$$\frac{fmm'}{r^2},$$

гдѣ постоянная f выражаетъ притяженіе единицы массы единицей массы на разстояніи единицы (п. 80).

Мы условились (п. 82) разсматривать взаимодѣйствіе двухъ точекъ, какъ положительное, когда точки отталкиваются, и какъ отрицательное, когда онѣ взаимно притягиваются; мы можемъ поэтому сказать, что взаимодѣйствіе F двухъ массъ m и m' опредѣляется равенствомъ

$$F = -\frac{fmm'}{r^2}.$$

319. Притяженіе точки нѣсколькими изолированными точками. Потенціалъ. — Разсмотримъ n неподвижныхъ точекъ, имѣющихъ соотвѣтственно массы $m_1, m_2, \dots, m_n$, и движущуюся точку P массы μ , находящуюся на разстояніяхъ $r_1, r_2, \dots, r_n$ отъ неподвижныхъ точекъ. Алгебраическія значенія $F_1, F_2, \dots, F_n$ притяженій точки P этими точками равны

$$F_1 = -\frac{f\mu m_1}{r_1^2}, \quad F_2 = -\frac{f\mu m_2}{r_2^2}, \quad \dots, \quad F_n = -\frac{f\mu m_n}{r_n^2};$$

результатирующая F этихъ притяженій допускаетъ силовую функцію, которая получается непосредственно слѣдующимъ образомъ (п. 77). Сообщимъ точкѣ P безконечно малое перемѣщеніе PP' ; работа результирующей F равна суммѣ элементарныхъ работъ составляющихъ, т. е. суммѣ работъ¹⁵⁾ $F_1 dr_1, F_2 dr_2, \dots, F_n dr_n$, и потому выражается черезъ

$$-\frac{f\mu m_1}{r_1^2} dr_1 - \frac{f\mu m_2}{r_2^2} dr_2 - \dots - \frac{f\mu m_n}{r_n^2} dr_n.$$

Но это выраженіе есть полный дифференціалъ функціи

$$f\mu \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right).$$

Положивъ

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n},$$

мы видимъ, что результирующая F допускаетъ силовую функцію

$$f\mu U.$$

Если мы назовемъ черезъ x, y, z координаты точки P , то U будетъ функціей координатъ x, y, z ; легко убѣдиться въ томъ, что проекціи результирующей F на оси можно написать такъ¹⁶⁾:

$$X = f\mu \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = f\mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = f\mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Достаточно, слѣдовательно, знать функцію U , чтобы вывести отсюда притяженіе точки P данными точками. Эта функція U называется потенциаломъ.

Въ частности, результирующая K притяженій, оказываемыхъ данными точками на массу 1, помѣщенную въ точкѣ P , есть производная силовой функціи fU .

Поле силъ K ; силовыя линіи. — Совокупность силъ K составляетъ силовое поле, производимое притяженіемъ данныхъ точекъ. Направленіе и напряженіе силы K въ точкѣ P называются направлениемъ и напряженіемъ поля въ точкѣ P .

На точку массы μ въ P дѣйствуетъ сила μK .

Согласно изложенному въ главѣ III, п. 76, сила K поля въ точкѣ P нормальна къ поверхности уровня

$$fU = \text{const.}, \quad \text{или} \quad U = \text{const.},$$

проходящей через эту точку; сила K направлена относительно этой поверхности въ сторону возрастанія функции U и равна $f \frac{dU}{dn}$, при чемъ производная взята по нормали къ поверхности уровня въ сторону возрастанія функции U . Если точка P совпадаетъ съ центромъ притяженія, то сила поля въ точкѣ P обращается въ безконечность и имѣетъ неопредѣленное направленіе.

Силовыя линіи характеризуются тѣмъ свойствомъ, что въ каждой точкѣ силовой линіи сила поля служитъ касательной къ ней; эти линіи, слѣдовательно, ортогональны къ поверхностямъ уровня. Черезъ каждую точку поля, не совпадающую съ центрами притяженія, проходитъ одна и только одна силовая линія.

Силовыя поверхности. — Силовой поверхностью называется поверхность, отличающаяся тѣмъ свойствомъ, что сила поля въ каждой ея точкѣ служитъ касательной этой поверхности. Чтобы получить одну изъ этихъ поверхностей, достаточно взять направляющую кривую D , которая не есть силовая линія, и разсмотрѣть поверхность, образуемую силовыми линіями, выходящими изъ различныхъ точекъ кривой D . Если направляющая D есть замкнутая линія, наприимѣръ, окружность, эллипсъ и т. п., то силовая поверхность, образуемая силовыми линіями, опирающимися на кривую D , имѣетъ форму трубки; она носитъ названіе силовой трубки.

Потокъ силы K сквозь какую-либо часть S силовой поверхности тождественно равенъ нулю. Дѣйствительно, этотъ потокъ опредѣляется (п. 315) интеграломъ

$$\iint_S K_n d\sigma,$$

взятымъ по всѣмъ элементамъ $d\sigma$ поверхности S , при чемъ K_n есть составляющая силы K въ элементъ $d\sigma$ по нормали къ послѣднему. Если S есть силовая поверхность, то потокъ K касается поверхности S , и составляющая K_n равна нулю для всѣхъ элементовъ $d\sigma$. Потокъ равенъ, слѣдовательно, нулю.

320. Электрическія и магнитныя притяженія. — Мы знаемъ что электрическая или магнитная масса можетъ быть положительной или отрицательной. Возьмемъ двѣ электрическія массы m и m' , находящіяся на разстояніи r одна отъ другой; если мы усло-

вимся, какъ выше, считать взаимодѣйствіе этихъ двухъ массъ положительнымъ, когда онѣ взаимно отталкиваются, и отрицательнымъ, когда онѣ взаимно притягиваются, то это взаимодѣйствіе будетъ алгебраически выражаться равенствомъ

$$F = k \frac{mm'}{r^2},$$

гдѣ k есть положительная постоянная. Въ самомъ дѣлѣ, когда массы m и m' одного и того же знака, то онѣ отталкиваются, а когда массы m и m' имѣютъ противоположные знаки, онѣ взаимно притягиваются.

Та же самая формула выражаетъ взаимодѣйствіе двухъ магнитныхъ массъ.

Такимъ образомъ, отъ формулъ, относящихся къ Ньютонову притяженію, можно перейти къ формуламъ, относящимся къ электрическимъ или магнитнымъ притяженіямъ и отталкиваніямъ, замѣщая постоянную f постоянной — k . Вслѣдствіе этого измѣненія знака, сила, приложенная къ единицѣ массы и направленная въ ньютоновомъ притяженіи въ ту сторону отъ поверхностей уровня, гдѣ потенціалы возрастаютъ, въ электрическихъ и магнитныхъ притяженіяхъ, напротивъ, направлена въ сторону убывающихъ потенціаловъ.

Итакъ, вопросы, относящіеся какъ къ ньютонову притяженію, такъ и къ электрическимъ или магнитнымъ притяженіямъ и отталкиваніямъ, приводятъ насъ къ потенціальной функціи

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} = \sum \frac{m}{r}.$$

321. Во всѣхъ точкахъ, кромѣ тѣхъ, въ которыхъ находятся притягивающія точки, потенціаль удовлетворяетъ уравненію Лапласа. — Потенціаль

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \dots + \frac{m_n}{r_n}$$

есть функція координатъ x, y, z точки P , конечная и непрерывная во всемъ пространствѣ, за исключеніемъ центровъ притяженія, гдѣ она обращается въ безконечность. Докажемъ, что во всякой точкѣ пространства, за исключеніемъ центровъ притяженія, она удовлетво-

рять уравненію Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ a_1, b_1, c_1 координаты неподвижной точки m_1 , имѣемъ

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}};$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r_1} &= 3 \frac{(x-a_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r_1} &= 3 \frac{(y-b_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r_1} &= 3 \frac{(z-c_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}. \end{aligned}$$

Сложивъ эти три уравненія, мы получимъ въ правой части нуль. Слѣдовательно:

$$\Delta \frac{1}{r_1} = 0.$$

Точно такъ же

$$\Delta \frac{1}{r_2} = 0, \quad \dots, \quad \Delta \frac{1}{r_n} = 0.$$

Съ другой стороны, сообразуясь съ выраженіемъ функціи U ,

$$\Delta U = m_1 \Delta \frac{1}{r_1} + m_2 \Delta \frac{1}{r_2} + \dots + m_n \Delta \frac{1}{r_n};$$

слѣдовательно:

$$\Delta U = 0.$$

322. Теорема Гаусса о силовомъ потокѣ. — Разсмотримъ замкнутую поверхность S и n центровъ притяженія $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Поставимъ себѣ задачей вычислить силовой потокъ (п. 315) сквозь поверхность S , направленный извнутри наружу, для притяженія, производимаго центрами $m_1, m_2, \dots, m_n$ на точку массы 1. Результатъ этого вычисленія и составляетъ теорему Гаусса.

Разсмотримъ элементъ $d\sigma$ поверхности S , содержащій точку P ; притягивающее дѣйствіе центра m_i ($i=1, 2, \dots, n$) порождаетъ (пп. 315 и 319) элементарный потокъ

$$f \frac{dU_i}{dn} d\sigma,$$

при чемъ U_i есть потенциалъ, обусловливаемый центромъ m_i и $\frac{dU_i}{dn}$ есть производная функции U_i по внѣшней нормали къ поверхности въ точкѣ P . Но, если обозначить черезъ U потенциалъ, вызванный притяженіемъ n центровъ, то, очевидно,

$$\frac{dU}{dn} = \sum_{i=1}^n \frac{dU_i}{dn};$$

элементарный потокъ равенъ, слѣдовательно,

$$f \frac{dU}{dn} d\sigma,$$

а полный потокъ сквозь поверхность S будетъ

$$f \int_S \int \frac{dU}{dn} d\sigma,$$

гдѣ производная взята по внѣшней нормали. При вычисленіи этого двойного интеграла мы различаемъ два случая:

1° Ни одинъ изъ притягивающихъ центровъ не находится внутри поверхности S .—Тогда функция U такъ же, какъ и ея первая и вторыя производныя, будетъ однозначной и конечной внутри поверхности S ; согласно формулѣ (4) п. 317, имѣемъ

$$\int_S \int \frac{dU}{dn} d\sigma = \int \int \int_V \Delta U d\tau,$$

при чемъ тройной интегралъ взять по объему V , ограниченному поверхностью S . Но такъ какъ (п. 321)

$$\Delta U = 0,$$

то тройной интегралъ, а потому и двойной равенъ нулю. Силовой потокъ равенъ, слѣдовательно, нулю.

2° Нѣкоторые изъ центровъ $m_1, m_2, \dots, m_n$ находятся внутри поверхности S .—Функция U не будетъ непрерывной внутри всей поверхности S , такъ какъ въ точкахъ $m_1, m_2, \dots, m_p$ (фиг. 184), лежащихъ внутри поверхности S , функция обращается въ бесконечность.

Опишемъ вокругъ этихъ точекъ, какъ центровъ, сферы очень малыхъ радіусовъ и рассмотримъ объемъ V , находящійся внутри

поверхности S и внѣ этихъ сферъ. Этотъ объемъ ограниченъ поверхностями $S, s_1, s_2, \dots, s_p$.

Въ этомъ объемѣ функція U и ея производныя непрерывны; слѣдовательно, попережнему

$$\iint_{s+s_1+\dots+s_p} \frac{dU}{dn} d\sigma = \iiint_V \Delta U d\tau,$$

при чемъ первый интеграль взять по всѣмъ поверхностямъ $S, s_1, s_2, \dots, s_p$, а второй — по объему V . Но такъ какъ

$$\Delta U = 0,$$

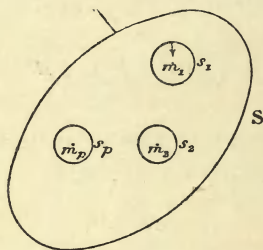
то тройной интеграль равенъ нулю, и мы можемъ написать:

$$\iint_{s+s_1+\dots+s_p} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0,$$

или, по разложеніи двойного интеграла на его различныя части,

$$\iint_S \frac{dU}{dn} d\sigma + \iint_{s_1} \frac{dU}{dn} d\sigma + \dots + \iint_{s_p} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0. \quad (1)$$

Въ этой формулѣ производныя функціи U взяты по внѣшнимъ нормалямъ относительно объема V : на каждой сферической



Фиг. 184.

поверхности производная берется, слѣдовательно, по нормали, направленной внутрь сферы. Вычислимъ интеграль

$$I_1 = \iint_{s_1} \frac{dU}{dn} d\sigma,$$

взятый по поверхности сферы s_1 . Мы можемъ написать

$$U = \frac{m_1}{r_1} + U_1,$$

гдѣ U_1 есть функція, непрерывная внутри сферы s_1 , такъ какъ U_1 есть потенциалъ массъ $m_2, m_3, \dots, m_n$, которыя всѣ находятся внѣ сферы s_1 . Мы имѣемъ поэтому

$$I_1 = \int \int \frac{d \frac{m_1}{r_1}}{dn} d\sigma + \int \int_{s_1} \frac{dU_1}{dn} d\sigma.$$

Второй интегралъ, представляющій силовой потокъ сквозь поверхность s_1 , обусловленный массами $m_2, m_3, \dots, m_n$, которыя всѣ лежатъ внѣ поверхности s_1 , равенъ нулю, согласно доказанному для перваго случая. Остается вычислить первый интегралъ. Такъ какъ внутренняя нормаль къ сферѣ въ точкѣ P совпадаетъ съ радіусомъ Pm_1 , то, называя черезъ r_1 разстояніе точки P отъ центра m_1 и черезъ $r_1 + dr_1$ разстояніе центра отъ точки P' , лежащей на нормали Pm_1 бесконечно близко отъ точки P , имѣемъ

$$dn = PP' = -dr_1,$$

$$\frac{d \frac{m_1}{r_1}}{dn} = -\frac{d \frac{m_1}{r_1}}{dr_1} = \frac{m_1}{r_1^2}.$$

Слѣдовательно,

$$I_1 = \int \int_{s_1} \frac{m_1}{r_1^2} d\sigma = \frac{m_1}{r_1^2} \int \int_{s_1} d\sigma = \frac{m_1}{r_1^2} 4\pi r_1^2 = 4\pi m_1,$$

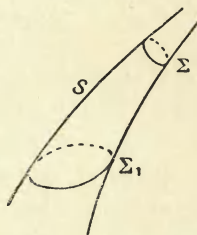
такъ какъ на поверхности s_1 разстояніе r_1 есть величина постоянная, а сумма элементовъ $d\sigma$ равна поверхности сферы $4\pi r_1^2$. Другіе интегралы, входящіе въ уравненіе (1), точно такъ же соответственно равны $4\pi m_2, \dots, 4\pi m_p$, и это уравненіе даетъ намъ окончательно:

$$\int \int_S \frac{dU}{dn} d\sigma = -4\pi(m_1 + m_2 + \dots + m_p) = -4\pi M',$$

гдѣ M' обозначаетъ сумму притягивающихъ массъ, находящихся внутри поверхности S ; итакъ, полный силовой потокъ сквозь поверхность S въ направленіи извнутри наружу равенъ произведенію $-4\pi f$ на сумму притягивающихъ массъ, находящихся внутри поверхности S .

Потокъ въ силовой трубкѣ. — Фарадэй вывелъ изъ этой теоремы важное слѣдствіе: если силовая трубка не содержитъ между двумя своими сѣченіями Σ и Σ' притягивающихъ

массъ, то силовой потокъ сквозь сѣченіе Σ въ опредѣленную сторону относительно трубки будетъ такимъ же, какъ и сквозь сѣченіе Σ_1 . Дѣйствительно, часть трубки, ограниченная двумя сѣченіями Σ и Σ_1 (фиг. 185), представляетъ собою замкнутую



Фиг. 185.

поверхность, не содержащую по предположенію притягивающихъ массъ.

Полный потокъ сквозь эту поверхность извнутри наружу равенъ нулю. Съ другой стороны, потокъ сквозь боковыя стѣнки тождественно равенъ нулю, такъ какъ эти стѣнки представляютъ собою силовую поверхность. Сумма потоковъ сквозь сѣченія Σ и Σ_1 извнутри наружу равна, слѣдовательно, нулю, и потокъ сквозь сѣченіе Σ извнутри наружу равенъ потоку сквозь Σ_1 извнѣ внутрь; предложеніе такимъ образомъ доказано.

III. — ПРИТЯЖЕНІЕ ВНѢШНЕЙ ТОЧКИ СПЛОШНОЙ МАССОЙ. УРАВНЕНІЕ ЛАПЛАСА.

323. Притяженіе внѣшней точки. — Мы только-что видѣли, что силовое поле, порожденное притяженіемъ изолированныхъ точекъ, производится потенциаломъ U , который существуетъ во всемъ пространствѣ, кромѣ притягивающихъ точекъ, гдѣ онъ обращается въ безконечность, и удовлетворяетъ уравненію Лапласа $\Delta U = 0$, исключая притягивающія точки.

Мы сейчасъ увидимъ, что эти теоремы можно распространить и на притяженіе сплошныхъ массъ. Для этого достаточно разсматривать сплошную массу, какъ состоящую изъ безконечно большого числа безконечно малыхъ массъ; вмѣсто суммъ предыдущаго параграфа мы должны взять опредѣленные интегралы.

Сплошныя массы, притяженіе которыхъ мы изучаемъ, могутъ составлять линію, поверхность или объемъ. Напримѣръ, въ небесной механикѣ, при изученіи взаимныхъ притяженій свѣтилъ, мы имѣемъ дѣло съ притяженіями объемовъ. Въ ученіи объ электричествѣ разсматриваются притяженія поверхностей, такъ какъ притягивающая ^{и отталкивающая} матерія тогда распределена по поверхности проводящихъ тѣлъ. Притяженіе линіи не имѣетъ прямого физическаго значенія, но въ нѣкоторыхъ случаяхъ притяженіе объема или поверхности приводится къ притяженію линіи.

Разсмотримъ теперь сплошную притягивающую массу и притягиваемую точку, не совпадающую ни съ одной изъ точекъ массы. Въ этомъ случаѣ принято говорить, что точка P есть внѣшняя по отношенію къ массѣ.

Раздѣлимъ сплошную массу на элементы безконечно малой массы dm . Пусть a, b, c будутъ координаты элемента dm и r —его разстояніе отъ точки $P(x, y, z)$:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Ньютоново притяженіе единицы массы, находящейся въ точкѣ P , элементомъ dm имѣетъ проекціи:

$$-f \frac{x-a}{r^3} dm, \quad -f \frac{y-b}{r^3} dm, \quad -f \frac{z-c}{r^3} dm.$$

Проекціи результирующей K этихъ притяженій равны, слѣдовательно:

$$(K) \quad \begin{cases} X = -f \int \frac{x-a}{r^3} dm, \\ Y = -f \int \frac{y-b}{r^3} dm, \\ Z = -f \int \frac{z-c}{r^3} dm, \end{cases}$$

гдѣ интегралы распространены на всѣ притягивающіе элементы dm . Эти интегралы будутъ простыми, двойными или тройными смотря по тому, разсматриваемъ ли мы линію, поверхность или объемъ. Чтобы выполнить интегрированіе, нужно разсматривать координаты x, y, z , какъ постоянныя, а координаты a, b, c , какъ единственныя перемѣнныя. Наконецъ, предѣлы интегрированія, зависящіе только отъ разсматриваемой массы, а не отъ точки P , не зависятъ отъ координатъ x, y, z .

324. Потенціалъ. — Функція $U(x, y, z)$

$$U(x, y, z) = \int \frac{dm}{r}, \quad (1)$$

въ которой интеграль распространяется на всю притягивающую массу, является опредѣленной для всякой точки P , внѣшней по отношенію къ этой массѣ. Она называется потенциаломъ. Дифференціальный элементъ имѣетъ конечное значеніе во всей области интеграціи, такъ какъ точка P внѣшняя, и поэтому мы можемъ къ интегралу въ правой части уравненія (1) примѣнить правило дифференцированія подъ знакомъ $\int$. Такъ какъ предѣлы интеграціи не зависятъ отъ x, y, z , то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \int \frac{dm}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = - \int \frac{(x-a) dm}{r^3},$$

.....,

откуда

$$X = f \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = f \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = f \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2)$$

Слѣдовательно, сила K поля есть производная функціи fU .

325. Уравненіе Лапласа. — Во всѣхъ внѣшнихъ точкахъ потенциалъ удовлетворяетъ также уравненію Лапласа $\Delta U = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{d}{dx} \frac{1}{r} dm = - \int \frac{x-a}{r^3} dm, \quad \dots$$

Такъ какъ дифференціальный элементъ остается конечнымъ, то мы можемъ дифференцировать вторично; такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} dm, \quad \dots$$

Слѣдовательно,

$$\Delta U = \int \Delta \frac{1}{r} dm,$$

а такъ какъ $\Delta \frac{1}{r} = 0$ (п. 321), то

$$\Delta U = 0 \quad (\text{внѣшняя точка}).$$

326. Частный случай: притягивающий сплошной объем; плотность въ точкѣ. — Разсмотримъ сплошную притягивающую массу, заполняющую объемъ V ; безконечно малый элементъ $d\tau$ объема имѣетъ координаты a, b, c и массу dm ; отношение $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ называется плотностью притягивающей массы въ точкѣ (a, b, c) ; эта плотность ρ вообще измѣняется въ зависимости отъ положенія разсматриваемаго элемента: она есть, слѣдовательно, функція координатъ a, b, c . Въ частномъ случаѣ, когда плотность ρ есть величина постоянная, притягивающая масса называется однородной.

Потенціалъ притягивающаго объема выражается тройнымъ интеграломъ

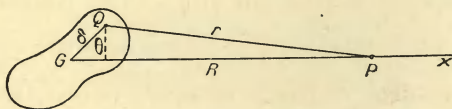
$$U = \iiint \frac{dm}{r} = \iiint \frac{\rho d\tau}{r};$$

точно такъ же составляющія притяженія выражаются тройными интегралами:

$$X = f \iiint \frac{(a-x)}{r^3} \rho d\tau, \quad \dots;$$

интегралы взяты по всему объему V . Въ случаѣ однородной массы множителя ρ можно вынести за знакъ интеграла.

327. Вычисленіе притяженія, производимаго на весьма удаленную точку. — Пусть M будетъ ограниченная притягивающая масса M , G — ея центръ тяжести (фиг. 186) и $dm = \rho d\tau$ элементъ притягивающей массы, лежащій въ точкѣ Q ; мы предполагаемъ, что притягиваемая точка P находится очень далеко отъ



Фиг. 186.

центра G сравнительно съ размѣрами притягивающаго тѣла; обозначимъ черезъ R разстояніе GP , черезъ r — разстояніе QP точки P отъ элемента dm , черезъ δ — разстояніе GQ точки G отъ элемента dm , и, наконецъ, черезъ θ уголъ прямыхъ GQ и GP . Потен-

ціаль U въ точкѣ P опредѣляется равенствомъ

$$U = \int \frac{Q d\tau}{r},$$

гдѣ интегрированіе распространяется на весь объемъ; въ треугольникѣ PGQ имѣемъ

$$r^2 = R^2 - 2R\delta \cos \theta + \delta^2.$$

Когда элементу dm мы будемъ послѣдовательно давать всевозможныя положенія въ притягивающей массѣ, разстояніе δ будетъ оставаться меньше извѣстнаго максимума; мы предполагаемъ сперва, что разстояніе R больше этого максимума. Мы можемъ написать

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(1 - 2 \frac{\delta}{R} \cos \theta + \frac{\delta^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Выраженіе въ скобкахъ будетъ вида $1 - k$, гдѣ

$$k = \frac{2\delta}{R} \cos \theta - \frac{\delta^2}{R^2};$$

предположимъ, что разстояніе R столь велико въ сравненіи съ δ , что абсолютное значеніе k меньше единицы при всѣхъ значеніяхъ угла θ . Разложимъ $\frac{1}{r}$ по формулѣ бинорма:

$$(1 - k)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k + \frac{1}{2 \cdot 4} k^2 + \dots$$

Располагая по степенямъ дроби $\frac{1}{R}$, получимъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2} \cos \theta + \frac{\delta^2}{R^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots$$

Мы можемъ доказать, что этотъ рядъ сходится при всѣхъ значеніяхъ R , превышающихъ δ ; коэффициентъ при $\frac{\delta^n}{R^{n+1}}$ есть многочленъ относительно $\cos \theta$, который носитъ названіе Лежандрова полинома. Ограничиваясь первыми тремя членами разложенія, имѣемъ

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2} \cos \theta + \frac{\delta^2}{R^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{\varepsilon}{R^4},$$

гдѣ ε сохраняетъ конечное значеніе, когда R безпредѣльно возрастаетъ. Подставивъ это выраженіе вмѣсто $\frac{1}{r}$ въ значеніе потенціала

ла U , мы получимъ первые члены разложёнія функціи U по степенямъ $\frac{1}{R}$. Чтобы написать эти первые члены, примемъ прямую GP за ось x -овъ; координаты элемента dm назовемъ черезъ a, b, c , причёмъ абсцисса a равна $\delta \cos \theta$; мы можемъ написать:

$$U = \int \frac{\varrho d\tau}{r} = \frac{1}{R} \int \varrho d\tau + \frac{1}{R^2} \int a\varrho d\tau + \frac{1}{2R^3} \int \varrho (3a^2 - \delta^2) d\tau + \frac{h}{R^4},$$

при чёмъ h сохраняетъ конечное значёніе, когда R безпредѣльно возрастаетъ.

Всѣ эти интегралы взяты по всей протягивающей массѣ: они имѣютъ простое значёніе. Первый интегралъ $\int \varrho d\tau$, очевидно, есть полная масса M ; второй интегралъ $\int a\varrho d\tau$ равенъ $M\xi$, гдѣ ξ есть абсцисса центра тяжести G притягивающей массы; этотъ интегралъ равенъ, слѣдовательно, нулю, такъ какъ центръ тяжести находится въ началѣ. Чтобы вычислить третій интегралъ, замѣтимъ, что

$$\delta^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

этотъ интегралъ, слѣдовательно, равенъ интегралу

$$\int (2a^2 - b^2 - c^2) \varrho d\tau.$$

Съ другой стороны, моменты инерціи притягивающей массы I_G и I_{GP} около центра тяжести G и вокругъ прямой GP равны

$$I_G = \int (a^2 + b^2 + c^2) \varrho d\tau, \quad I_{GP} = \int (b^2 + c^2) \varrho d\tau;$$

слѣдовательно, разсматриваемый интегралъ равенъ $2I_G - 3I_{GP}$. Разложёніе функціи U теперь представится такъ:

$$U = M \frac{1}{R} + \frac{1}{2} (2I_G - 3I_{GP}) \frac{1}{R^3} + h \frac{1}{R^4}. \quad (3)$$

Эта формула, употребляемая часто въ небесной механикѣ, показываетъ, что, если отбросимъ члены, содержащіе $\frac{1}{R^3}$ потенциалъ и, слѣдовательно, притяжёнiе будутъ такими, какъ будто вся масса сосредоточена въ центрѣ тяжести G . Мы видимъ также, что съ удаленіемъ точки P на безконечное разстояніе, произведеніе RU стремится къ предѣлу M . Этотъ результатъ можно формулировать такъ:

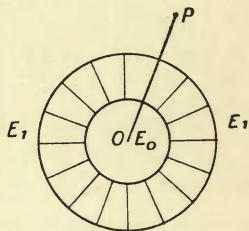
на бесконечно большомъ разстояніи потенціаль обращается въ нуль (бесконечно малую) того же порядка, что и $\frac{M}{R}$.

328. Притяженіе внѣшней точки однороднымъ сферическимъ слоемъ. — Представимъ себѣ двѣ концентрическія сферы, описанныя изъ центра O радіусами R_0 и R_1 , при чемъ $R_0 < R_1$. Предположимъ, что пространство между двумя сферами заполнено однородной матеріей плотности ρ и найдемъ притяженіе внѣшней точки P (фиг. 187) этой средой. Въ данномъ случаѣ центръ тяжести притягивающей массы лежитъ въ общемъ центрѣ обѣихъ сферъ, который мы примемъ за начало; тогда разстояніе $OP = R$ выразится формулой

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пространство, внѣшнее по отношенію къ притягивающей массѣ, состоитъ изъ двухъ областей: полой области E_0 , окружающей точку O , и бесконечнаго пространства E_1 , окружающаго массу. Въ первой области $R \leq R_0$, а во второй области $R \geq R_1$.

Чтобы опредѣлить потенціаль U притягивающей массы въ этихъ двухъ областяхъ, замѣтимъ, что въ каждой изъ нихъ функ-



Фиг. 187.

ція U удовлетворяетъ уравненію Лапласа $\Delta U = 0$, и что, въ силу симметріи, U есть, очевидно, функція лишь разстоянія $R = OP$ центра отъ притягиваемой точки. Мы можемъ также сказать, что U есть функція отъ $\frac{1}{R}$ и написать:

$$U = \varphi \left(\frac{1}{R} \right).$$

Вычисляя ΔU , имѣемъ, слѣдовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi' \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varphi'' \left(\frac{1}{R} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} \right)^2 + \varphi' \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{R}.$$

Аналогичныя выраженія мы получимъ для $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$; сложивъ ихъ и замѣчая, что $\Delta \frac{1}{R} = 0$, мы видимъ, что уравненіе Лапласа приводится къ слѣдующему виду:

$$\varphi'' \left(\frac{1}{R} \right) = 0.$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ U есть линейная функція отъ $\frac{1}{R}$

$$U = \frac{A}{R} + B; \quad (4)$$

чтобы опредѣлить константы A и B , мы рассмотримъ одно за другимъ два возможныхъ предположенія относительно положенія точки P .

1° Точка P лежитъ въ области E_1 , $R \geq R_1$. — Въ этомъ случаѣ точка P можетъ удаляться на бесконечно большое разстояніе; но тогда функція U стремится къ нулю (п. 327), и, слѣдовательно, константа B равна нулю, а произведеніе RU стремится къ предѣлу, равному полной массѣ M , такъ что $A = M$. Окончательно, въ области E_1 имѣемъ:

$$U = \frac{M}{R} \quad (R \geq R_1).$$

Мы получили такимъ образомъ теорему, которую впервые высказалъ Ньютонъ: потенциалъ и, слѣдовательно, притяженіе, производимое однороднымъ сферическимъ слоемъ на точку безпредѣльнаго внѣшняго пространства, имѣетъ такое же значеніе, какое онъ имѣлъ бы, если бы вся масса слоя была сосредоточена въ центрѣ.

2° Точка P лежитъ въ области E_0 . — Если точка P лежитъ въ полой области E_0 , то потенциалъ попрежнему выражается формулой (4); но такъ какъ функція U должна оставаться конечной при всѣхъ положеніяхъ точки P въ этой области, то по-

стоянная A есть нуль, ибо въ противномъ случаѣ функція U въ точкѣ O обращалась бы въ бесконечность. Слѣдовательно, потенциалъ въ поллой области E_0 есть величина постоянная, $U = B$, и притяженіе слоевъ точки, лежащей внутри этой части, равно нулю, такъ какъ составляющія притяженія, будучи частными производными функціи U , равны нулю.

Притяженіе, оказываемое однороднымъ сферическимъ слоевъ на точку, лежащую въ поллой части, равно нулю.

Чтобы окончить это изслѣдованіе, остается лишь вычислить постоянное значеніе потенциала U въ различныхъ точкахъ P поллой части E_0 . Для этой цѣли достаточно предположить, что точка, потенциалъ которой мы ищемъ, находится въ центрѣ O . Разобьемъ теперь слой на бесконечно тонкіе концентрическіе слои, каждый изъ которыхъ заключенъ между двумя сферами, описанными изъ центра O радіусами r и $r + dr$. Такъ какъ масса однороднаго шара радіуса r равна $\frac{4}{3} \pi \rho r^3$, то слой, который является ея приращеніемъ при возрастаніи радіуса r на dr , имѣетъ массу

$$dm = d \frac{4}{3} \pi \rho r^3 = 4 \pi \rho r^2 dr.$$

Всѣ элементы этого слоя находятся на одномъ и томъ же разстояніи r отъ центра; слѣдовательно, потенциалъ этого слоя въ точкѣ O равенъ

$$\frac{dm}{r} = 4 \pi \rho r dr,$$

а полный потенциалъ разсматриваемаго слоя, $R_0 \leq r \leq R_1$, въ точкѣ O равенъ

$$U = \int_{R_0}^{R_1} 4 \pi \rho r dr = 2 \pi \rho (R_1^2 - R_0^2).$$

Заключеніе относительно однороднаго сферическаго слоя. — 1° Въ безграничной области, $R \geq R_1$,

$$U = \frac{M}{R};$$

2° Въ поллой области, $R \leq R_0$,

$$U = 2 \pi \rho (R_1^2 - R_0^2).$$

IV. — ПРИТЯЖЕНИЕ СПЛОШНЫМЪ ОБЪЕМОМЪ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА.

329. Точка P лежитъ внутри притягивающаго объема. —

Мы оставимъ въ сторонѣ случай, когда притягивающая масса представляетъ собою линію или поверхность, а притягиваемая точка P есть точка этой линіи или этой поверхности. Вообразимъ притягивающій объемъ V , ограниченный со всѣхъ сторонъ. Когда точка $P(x, y, z)$ лежитъ внѣ притягивающей массы, то, какъ мы видѣли, составляющія притяженія суть

$$X = f \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \varrho \, d\tau \quad \dots, \quad (1)$$

потенціалъ равенъ

$$U = \iiint_V \frac{\varrho \, d\tau}{r}, \quad (2)$$

гдѣ

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2},$$

$$d\tau = da \, db \, dc;$$

кромѣ того, имѣютъ мѣсто соотношенія

$$X = f \frac{\partial U}{\partial x} \quad Y = f \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = f \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3)$$

Но если точка P находится внутри притягивающей массы, то дифференціальный элементъ, входящій въ интегралы, обращается въ бесконечность для одной точки въ области интегрированія, — для той точки, которой соответствуетъ значеніе $r=0$. Мы не можемъ, слѣдовательно, быть увѣрены, что эти интегралы сохраняютъ смыслъ. Кромѣ того, формулы (3) были доказаны путемъ дифференцированія подъ знакомъ $\int$, а эта операція уже не будетъ законной, коль скоро дифференціальный элементъ обращается въ бесконечность. Мы должны, слѣдовательно, отдѣльно рассмотреть вопросъ о томъ, что произойдетъ, когда точка P находится внутри притягивающей массы.

Мы докажемъ слѣдующія предложенія:

1° Функции U , X , Y , Z , заданныя формулами (1) и (2), остаются конечными и опредѣленными при всякомъ положеніи притягиваемой точки P .

2° Функція U во всемъ пространствѣ имѣетъ первыя производныя, и соотношенія (3) сохраняютъ силу при всякомъ положеніи точки P ; отсюда слѣдуетъ, что функція U непрерывна во всемъ пространствѣ.

3° Функціи X, Y, Z имѣютъ во всемъ пространствѣ первыя производныя, или, что сводится къ тому же, функція U во всемъ пространствѣ имѣетъ вторыя производныя; отсюда слѣдуетъ, что функціи X, Y, Z непрерывны во всемъ пространствѣ.

4° Когда точка P лежитъ внутри притягивающаго объема, потенциалъ U въ точкѣ P удовлетворяетъ такъ называемому уравненію Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi\rho,$$

гдѣ ρ есть плотность притягивающей массы въ точкѣ P .

5° Вторыя производныя функціи U претерпѣваютъ разрывъ, когда точка P проходитъ черезъ поверхность притягивающаго объема.

330. Функціи U, X, Y, Z остаются опредѣленными и конечными внутри притягивающей массы. — Предположимъ, что притягиваемая точка $P(x, y, z)$ лежитъ внутри притягиваемой массы. Возьмемъ систему полярныхъ координатъ въ пространствѣ съ началомъ въ точкѣ P . Проведемъ черезъ точку P три оси Px', Py', Pz' , соотвѣтственно параллельныя осямъ Ox, Oy, Oz , и будемъ опредѣлять положеніе точки m пространства при помощи разстоянія $Pm=r$, угла θ прямой Pm съ осью Pz' и угла φ плоскости $z'Pm$ съ плоскостью $z'Px'$. Координаты a, b, c точки m выражаются въ функціи r, θ, φ помощью формулъ

$$a - x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$b - y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$c - z = r \cos \theta.$$

Въ этой системѣ координатъ элементъ объема $d\tau$ выражается такъ:

$$d\tau = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

дѣйствительно, элементъ $d\tau$ заключенъ между двумя сферами, описанными изъ центра P радиусами r и $r+dr$, двумя конусами вращения съ отверстиями θ и $\theta+d\theta$ и двумя плоскостями, которыя

проходить через ось Pz' и образуют между собой угол $d\varphi$ (чертеж, аналогичный чертежу в п. 38).

Выражения функций X, Y, Z, U теперь будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} X &= f \iiint \rho \sin^2 \theta \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi, \\ Y &= f \iiint \rho \sin^2 \theta \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi, \\ Z &= f \iiint \rho \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi, \\ U &= f \iiint \rho r \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Элементы этих интегралов конечны, и так как интегралы распространены на конечные значения координат r, θ, φ , то сами интегралы имеют конечные и вполне определенные значения.

331. Соотношения $X = f \frac{\partial U}{\partial x}$, ... сохраняют силу внутри притягивающего объема. — Вокруг точки P , находящейся внутри притягивающей массы, рассмотрим малый объем V_1 ; весь притягивающий объем V разложится таким образом на две части: на объем V_1 и объем $V_2 = V - V_1$.

Пусть U_1 и U_2 будут потенциалы этих двух объемов в точке P ; X_1, Y_1, Z_1 — составляющие притяжения объема V_1 в точке P и X_2, Y_2, Z_2 — составляющие притяжения объема V_2 в той же точке. Очевидно,

$$U = U_1 + U_2, \quad X = X_1 + X_2, \quad \dots$$

Возьмем в объеме V_1 вторую точку P' с координатами $x + \Delta x, y, z$, которая получается при перемещении точки P параллельно оси Ox , и пусть U' будет значение всего потенциала в точке P' , и U'_1, U'_2 значения потенциалов объемов V_1 и V_2 . Имеем:

$$\frac{U' - U}{\Delta x} = \frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} + \frac{U'_2 - U_2}{\Delta x}.$$

Когда точка P' стремится к точке P , отношение $\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x}$ стремится к пределу $\frac{1}{f} X_1$, так как точка P лежит вне объема V_2 , и мы имеем

$$X_2 = f \frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

Изслѣдуемъ отношеніе $\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x}$. Обозначивъ черезъ r и r' разстоянія переменнѣй точки m объема V_1 отъ точекъ P и P' , имѣемъ:

$$U'_1 = \iiint_{V_1} \frac{q}{r'} d\tau,$$

$$U_1 = \iiint_{V_1} \frac{q}{r} d\tau,$$

$$\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} = \iiint_{V_1} \frac{q}{\Delta x} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) d\tau.$$

Но абсолютное значеніе количества $\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$ меньше, чѣмъ $\frac{1}{rr'}$, потому что въ треугольникѣ PmP' абсолютное значеніе величины Δx больше разности $r' - r$; съ другой стороны, ясно, что $\frac{1}{rr'} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right)$ ¹⁷⁾. Наконецъ, если назовемъ черезъ q_1 наибольшее значеніе q въ объемѣ V_1 , то

$$\left| \frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} \right| < \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \frac{q_1}{r^2} d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \frac{q_1}{r'^2} d\tau,$$

гдѣ лѣвая часть выражаетъ абсолютное значеніе отношенія $\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x}$.

Взявъ полярную систему координатъ съ началомъ въ точкѣ P , мы первый изъ двухъ предыдущихъ интеграловъ выразимъ такъ:

$$\iiint_{V_1} \frac{q_1}{r^2} d\tau = \iiint_{V_1} q_1 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Когда углы θ и φ выбраны, то соответствующее направленіе пересѣкаетъ поверхность, ограничивающую объемъ V_1 , въ точкѣ, разстояніе которой отъ точки P равно R ; поэтому, интегрируя сначала по r между предѣлами 0 и R , а затѣмъ по θ между 0 и π и по φ между 0 и 2π , мы получимъ

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi q_1 R \sin \theta \, d\theta.$$

Назовемъ черезъ C наибольшую хорду поверхности, ограничивающей объемъ V_1 ; тогда

$$R < C;$$

предыдущий интегралъ будетъ, слѣдовательно, меньше, чѣмъ

$$\varrho_1 C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi \varrho_1 C.$$

Мы видимъ точно такъ же, что

$$\iiint_{V_1} \frac{\varrho_1 d\tau}{r'^2} < 4\pi \varrho_1 C,$$

и заключаемъ отсюда, что

$$\left| \frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} \right| < 4\pi \varrho_1 C.$$

Такимъ образомъ, когда въ формулѣ

$$\frac{U' - U}{\Delta x} = \frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} + \frac{U'_2 - U_2}{\Delta x}$$

Δx стремится къ нулю, второе отношеніе правой части стремится къ предѣлу $\frac{1}{f} X_2$, а первое отношеніе по абсолютному значенію остается меньше, чѣмъ $4\pi \varrho_1 C$. Объемъ V_1 мы можемъ взять столь малымъ, чтобы хорда C была меньше сколь угодно малаго заданнаго числа и чтобы разность между X_2 и X была сколь угодно мала; слѣдовательно, отношеніе $\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x}$ стремится къ предѣлу $\frac{1}{f} X$, и попрежнему

$$X = f \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Точно такъ же мы убѣждаемся, что и двѣ другія формулы (3) сохраняютъ силу. Такъ какъ функція U имѣетъ во всѣхъ точкахъ пространства первыя производныя, то она вездѣ непрерывна.

332. Вторыя производныя потенціала. — 1° Внѣшняя точка. — Для случая, когда точка P находится внѣ притягивающихъ массъ, мы нашли по правилу дифференцированія подъ знакомъ $\int$, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint_V \left[\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \varrho d\tau, \quad \dots \quad (5)$$

Эти производныя конечны и непрерывны, пока точка P лежитъ внѣ притягивающей массы. Мы видѣли при ихъ сложеніи, что количество подъ знакомъ $\int$ получается тождественно равнымъ нулю,

и вывели уравненіе Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

2° Внутренняя точка. — Когда точка P лежитъ внутри притягивающаго объема, то вторыя производныя уже не могутъ быть вычислены по правилу дифференцированія подъ знакомъ $\int$.

Это обусловливается тѣмъ, что интегралы (5), къ которымъ приводитъ примѣненіе этого правила, теряютъ смыслъ, такъ какъ множитель $\frac{1}{r}$ обращается въ безконечность; въ этомъ мы могли также убѣдиться, взявъ полярныя координаты съ началомъ въ точкѣ P . Однако, отсюда не слѣдуетъ заключить, что въ этомъ случаѣ уже не существуетъ вторыхъ производныхъ: онѣ лишь не выражаются формулами (5). Мы сейчасъ увидимъ, что эти производныя продолжаютъ существовать, мы дадимъ ихъ выраженія и покажемъ, что онѣ уже не удовлетворяютъ уравненію Лапласа, но удовлетворяютъ другому уравненію, которое называется уравненіемъ Пуассона.

Согласно тому, что мы видѣли выше, всегда имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\frac{X}{f} = \frac{\partial U}{\partial x} = \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \varrho \, d\tau,$$

гдѣ ϱ и r суть функціи отъ a, b, c . Мы можемъ написать

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \iiint_V \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r} \right)}{\partial a} d\tau + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a} d\tau,$$

такъ какъ

$$\begin{aligned} \frac{a-x}{r^3} &= - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial a}, \\ \frac{a-x}{r^3} \varrho &= - \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = - \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r} \right)}{\partial a} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial a}. \end{aligned}$$

Примѣнимъ формулу Грина (п. 314) къ первому изъ этихъ интеграловъ. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что функція $\frac{\varrho}{r}$ координатъ a, b, c обращается въ безконечность въ объемѣ V , когда точка a, b, c совпадаетъ съ точкой P .

Опишемъ въ такомъ случаѣ вокругъ точки P сферу s очень малымъ радіусомъ ε ; мы можемъ примѣнить формулу Грина къ объему $V-s$, заключенному между поверхностью S и поверхностью сферы s ; мы будемъ имѣть

$$\iiint_{V-s} \frac{\partial \left(\frac{\rho}{r} \right)}{\partial a} da db dc = \iint_S \frac{\rho}{r} a d\sigma + \iint_s \frac{\rho}{r} a d\sigma,$$

гдѣ a, b, c суть переменныя интеграціи, а a въ двухъ интегралахъ соответственно обозначаетъ косинусъ угла оси Ox съ внѣшней относительно объема $V-s$ нормалью къ поверхностямъ S и s .

Когда радіусъ ε сферы s стремится къ нулю, двойной интегралъ, взятый по поверхности s , тоже стремится къ нулю. Дѣйствительно, въ этомъ интегралѣ $r = \varepsilon$, $|a| < 1$; обозначая черезъ ρ_1 наибольшее значеніе плотности ρ , имѣемъ

$$\left| \iint_s \frac{\rho}{r} a d\sigma \right| < \frac{\rho_1}{\varepsilon} \iint_s d\sigma;$$

но

$$\iint_s d\sigma = 4\pi\varepsilon^2,$$

слѣдовательно,

$$\left| \iint_s \frac{\rho}{r} a d\sigma \right| < 4\pi\rho_1\varepsilon,$$

и произведеніе $4\pi\rho_1\varepsilon$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε . Когда ε стремится къ нулю, формула Грина дастъ намъ, слѣдовательно:

$$\iiint_V \frac{\partial \left(\frac{\rho}{r} \right)}{\partial a} d\tau = \iint_S \frac{\rho}{r} a d\sigma;$$

откуда заключаемъ, что

$$\frac{X}{r} = \frac{\partial U}{\partial x} = - \iint_S \frac{\rho}{r} a d\sigma + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial a} d\tau;$$

здѣсь первый интегралъ взятъ по ограничивающей поверхности, и a обозначаетъ косинусъ угла внѣшней нормали съ осью Ox . Этотъ первый интегралъ можно истолковать, какъ потенциалъ не имѣющаго толщины слоя съ поверхностной плотностью ρa , распределеннаго по поверхности S , которой ограниченъ притягивающій объемъ V .

Второй интегралъ также можно интерпретировать, какъ потенциалъ того же объема, въ которомъ плотность элемента $d\tau$ равна $\frac{\partial \rho}{\partial a}$.

По предыдущему, эти два интеграла имѣютъ каждый частную производную по x , которая можетъ быть получена по правилу дифференцированія подъ знакомъ $\int$. Такимъ образомъ мы находимъ:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \int_S \int \frac{a-x}{r^3} \rho a \, d\sigma + \int \int \int_V \frac{a-x}{r^3} \frac{\partial \rho}{\partial a} \, d\tau.$$

Точно такъ же можно найти и $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

Эти вторыя производныя непрерывны во всемъ объемѣ; но, какъ мы увидимъ ниже, онѣ претерпѣваютъ рѣзкое измѣненіе, когда точка P проходитъ сквозь поверхность S .

333. Силовой потокъ. Теорема Гаусса. — Мы только-что видѣли, что притяженіе K , производимое сплошной массой на массу 1, находящуюся въ точкѣ $P(x, y, z)$, будетъ конечнымъ и опредѣленнымъ при всякомъ положеніи точки P , и что оно есть производная силовой функции fU . Мы можемъ на опредѣленное такимъ образомъ силовое поле распространить теорему Гаусса о притяженіи изолированныхъ точекъ (п. 322):

Пусть Σ будетъ произвольная замкнутая поверхность и M' — заключенная въ этой поверхности часть притягивающей массы; силовой потокъ сквозь эту поверхность изнутри наружу равенъ

$$-4\pi fM'.$$

Для доказательства разобьемъ притягивающій объемъ на малые кубики плоскостями, параллельными координатнымъ. Каждый такой кубикъ замѣнимъ точкой, имѣющей такую же массу, какъ и кубикъ, и помѣщенной въ его центрѣ тяжести. Пусть K' будетъ силовое поле, обусловленное этими изолированными массами. По теоремѣ Гаусса потокъ сквозь произвольную замкнутую поверхность выражается формулой

$$\int \int_{\Sigma} K'_n \, d\sigma = -4\pi fM',$$

гдѣ M' есть вся масса притягивающихъ точекъ, заключенныхъ въ

поверхности Σ . Если мы теперь будемъ безпредѣльно увеличивать число элементарныхъ кубиковъ такъ, чтобы объемъ каждаго стремился къ нулю, то притяженіе K' будетъ стремиться къ предѣлу, который равенъ притяженію K , обусловливаемому сплошными массами, и предыдущая формула перейдетъ въ

$$\int_{\Sigma} K_n d\sigma = -4\pi f M';$$

здѣсь M' есть вся притягивающая масса, заключенная въ поверхности Σ .

334. Уравненіе Пуассона. — Теорема Гаусса о силовомъ потокѣ непосредственно приводитъ къ уравненію Пуассона. Вообразимъ въ притягивающей массѣ произвольную замкнутую поверхность Σ ; имѣемъ:

$$\int_{\Sigma} K_n d\sigma = f \int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} d\sigma = -4\pi f M', \quad (6)$$

гдѣ M' есть масса, заключенная въ поверхности Σ , и $\frac{dU}{dn}$ — производная потенциала по внѣшней нормали. Пусть V' будетъ объемъ, ограниченный поверхностью Σ ; ясно, что

$$M' = \int \int \int_{V'} \varrho d\tau.$$

Съ другой стороны, формула Грина даетъ:

$$\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} d\sigma = \int \int \int_{V'} \Delta U d\tau.$$

Поэтому уравненіе (6) напишется такъ:

$$\int \int \int_{V'} \Delta U d\tau = -4\pi \int \int \int_{V'} \varrho d\tau$$

или

$$\int \int \int_{V'} (\Delta U + 4\pi \varrho) d\tau = 0.$$

Этотъ интегралъ равенъ нулю при любомъ значеніи объема V' , разсматриваемаго внутри притягивающей массы; слѣдовательно, дифференціальный элементъ тождественно равенъ нулю, и мы имѣемъ

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi \varrho,$$

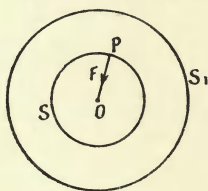
гдѣ ϱ есть плотность въ точкѣ (x, y, z) .

Это есть уравнение Пуассона. Мы можем сказать, что оно содержитъ въ себѣ уравнение Лапласа, какъ частный случай: дѣйствительно, если точка $P(x, y, z)$ лежитъ внѣ притягивающей массы, то плоскость q въ этой точкѣ равна нулю, и тогда

$$\Delta U = 0.$$

335. Разрывъ непрерывности вторыхъ производныхъ функции U . — Мы видимъ, что вторыя производныя функции U должны претерпѣть разрывъ, когда точка P проходитъ черезъ поверхность, которою ограниченъ притягивающій объемъ, такъ какъ количество ΔU , которое равно нулю, когда точка P лежитъ внѣ объема, принимаетъ сразу значеніе $-4\pi q$, когда точка P проникаетъ въ объемъ.

336. Однородная сфера: подтвержденіе уравненія Пуассона. — Пусть S_1 будетъ однородная сфера, имѣющая радіусъ R_1 (фиг. 188) и плотность q . Согласно доказанному въ п. 328, потенциалъ этой сферы и притяженіе, производимое ею на внѣшнюю точку, имѣютъ такую же величину, какъ если бы вся массы сферы была сосредоточена въ ея центрѣ O . Рассмотримъ, что произойдетъ съ внутренней точкой P , лежащей на разстояніи $OP = R$ отъ центра, при чемъ $R < R_1$. Опишемъ вспомогательную сферу S изъ центра O радіусомъ R ; притяженіе, производимое данной сферой S_1 на массу



Фиг. 188.

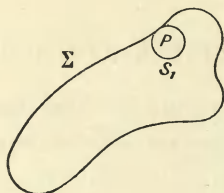
единицу, находящуюся въ точкѣ P , есть равнодѣйствующая притяженія, производимаго слоемъ $S_1 - S$, заключеннымъ между двумя сферами, и притяженія, производимаго сферой S . Но притяженіе, производимое слоемъ $S_1 - S$, равно нулю (п. 328); притяженіе, производимое сферой S , имѣетъ такую же величину, какъ если бы

ея масса $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ была сосредоточена въ центрѣ, и равно, слѣдовательно,

$$F = f \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3}\pi f\rho R.$$

Такъ какъ притяженіе внутренней точки P , производимое слоемъ S_1 , одинаково съ притяженіемъ слоя, производимымъ сферой S , то оно равно силѣ F , направленной къ центру и пропорціональной разстоянію R .

Потенціалъ U во внутренней точкѣ P есть сумма потенциала сферы U , равнаго $\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{R}$, и потенциала слоя $S_1 - S$; послѣдній потенциаль равенъ $2\pi\rho(R_1^2 - R^2)$ (п. 328). Итакъ, обозначая че-



Фиг. 189.

резъ x, y, z координаты точки P и черезъ a, b, c координаты центра сферы, имѣемъ для точки внутри:

$$U = 2\pi\rho \left(R_1^2 - \frac{R^2}{3} \right) = 2\pi\rho \left[R_1^2 - \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{3} \right].$$

Вычисленіе показываетъ, что вторыя производныя $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ равны каждая $-\frac{4\pi\rho}{3}$; отсюда мы сейчасъ же выводимъ уравненіе Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi\rho.$$

337. Подтвержденіе уравненія Пуассона для однородной притягивающей массы. — Разсмотримъ однородную среду, которая, имѣя плотность ρ , ограничена поверхностью Σ , и возьмемъ внутреннюю точку P съ координатами x, y, z (фиг. 189). Проведемъ вспомогательную поверхность S_1 , лежащую внутри поверхности Σ и заключающую внутри себя точку P .

Потенціалъ U разсматриваемой среды въ точкѣ P равенъ суммѣ потенциала U_1 матеріи, лежащей внутри сферы S_1 , и потенциала U_2 матеріи, заключенной между сферой S_1 и поверхностью Σ :

$$U = U_1 + U_2.$$

Такимъ образомъ,

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2;$$

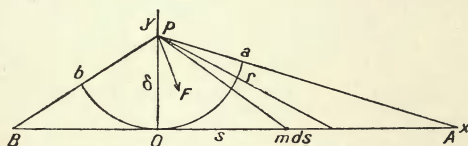
но $\Delta U_1 = -4\pi\rho$, такъ какъ U_1 есть потенциалъ однороднаго шара въ точкѣ, находящейся внутри его, и $\Delta U_2 = 0$, такъ какъ U_2 есть потенциалъ массы $\Sigma - S_1$ въ точкѣ, находящейся внѣ этой массы. Мы получаемъ, такимъ образомъ, для однороднаго притягивающаго тѣла уравненіе Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi\rho.$$

V. — НЕОГРАНИЧЕННЫЯ ПРИТЯГИВАЮЩІЯ МАССЫ.

338. Притяженіе точки однороднымъ стержнемъ. — Выше мы вездѣ предполагали, что притягивающія массы ограничены. Если же мы предположимъ, что онѣ неограничены, то разсмотрѣнные интегралы и слово притяженіе могутъ потерять смыслъ. Мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ одного частнаго случая, когда притяженіе еще сохраняетъ смыслъ.

Разсмотримъ однородную прямую AB (фиг. 190); пусть h будетъ масса единицы длины и P —точка, притягиваемая различными



Фиг. 190.

элементами этой прямой. Мы сейчас докажемъ, что притяженіе точки P прямою стремится къ предѣлу, когда точки A и B удаляются на безконечное разстояніе одна отъ другой, и что этотъ предѣлъ не зависитъ отъ того, какимъ образомъ точки A и B безконечно удаляются другъ отъ друга.

Изъ точки P опустимъ на прямую AB перпендикуляръ PO . Пусть будетъ $PO = \delta$, s —длина Om , отсчитываемая отъ точки O ,

принятой за начало, ds — элементъ прямой, находящійся въ m, μ — масса точки P , и положимъ $r = Pm$; масса элемента ds равна $h ds$. Притяженіе точки P элементомъ ds равно

$$\frac{f\mu h ds}{r^2}.$$

Обозначимъ черезъ θ уголъ OPm . Имѣемъ:

$$s = \delta \tan \theta, \quad r = \frac{\delta}{\cos \theta}.$$

Дифференцируя, получимъ:

$$ds = \frac{\delta}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \frac{ds}{r^2} = \frac{d\theta}{\delta};$$

притяженіе, производимое элементомъ ds и направленное отъ точки P къ элементу ds , равно, слѣдовательно:

$$\frac{f\mu h d\theta}{\delta}.$$

Проекціи этого притяженія на оси Ox и Oy равны

$$\frac{f\mu h}{\delta} \sin \theta d\theta, \quad -\frac{f\mu h}{\delta} \cos \theta d\theta.$$

Пусть θ_0 и θ_1 будутъ углы, соотвѣтствующіе точкамъ A и B . Проекціи на оси Ox и Oy притяженія, производимаго ограниченной прямой AB , выразятся такъ:

$$X = \frac{f\mu h}{\delta} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin \theta d\theta, \quad Y = -\frac{f\mu h}{\delta} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos \theta d\theta,$$

или

$$X = -\frac{f\mu h}{\delta} (\cos \theta_1 - \cos \theta_0), \quad Y = -\frac{f\mu h}{\delta} (\sin \theta_1 - \sin \theta_0).$$

Когда точка A удаляется безпредѣльно вправо, а точка B — безпредѣльно влѣво, уголъ θ_0 стремится къ предѣлу $-\frac{\pi}{2}$, уголъ θ — къ предѣлу $\frac{\pi}{2}$, и мы найдемъ, что

$$X = 0, \quad Y = -\frac{2f\mu h}{\delta}.$$

Притяженіе становится перпендикулярнымъ къ прямой; оно измѣняется обратно пропорціонально разстоянію точки отъ прямой.

Замѣчаніе. — Относительно притяженія, производимаго ограниченной прямой, можно сдѣлать слѣдующія геометрическія замѣчанія. Изъ точки P , какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ δ ; пусть $d\sigma = \delta d\theta$ будетъ дуга этой окружности, заключенная между двумя безконечно близкими радіусами, проведенными къ концамъ элемента ds прямой. Мы видѣли, что притяженіе, производимое этимъ элементомъ ds , направлено отъ точки P къ ds и равно

$$\frac{f\mu h d\theta}{\delta} = \frac{f\mu h d\sigma}{\delta^2},$$

оно равно, слѣдовательно, притяженію, которое оказывалъ бы на точку P элементъ окружности $d\sigma$, если бы масса единицы длины окружности была равна h , какъ и въ притягивающей прямой. Поэтому притяженіе F , производимое прямой AB , будетъ такое же, какъ и притяженіе ограниченной радіусами PA и PB дуги окружности ab : оно, очевидно, направлено по биссектриссѣ угла APB . Силовое поле F произведено потенциаломъ; поверхностями уровня, очевидно, служатъ поверхности вращенія вокругъ прямой AB ; въ плоскости, проходящей черезъ прямую AB , линіями уровня будутъ служить тѣ линіи, по которымъ нужно перемѣстить точку P для того, чтобы сила F была нормальна къ нимъ; это будутъ, слѣдовательно, эллипсы съ фокусами въ точкахъ A и B .

ГЛАВА XVII.

РАВНОВѢСІЕ И ВНУТРЕННЕЕ ДВИЖЕНІЕ СОВЕРШЕННОЙ ЖИДКОСТИ.

I. — НѢКОТОРЫЯ ОБЩІЯ ПОЛОЖЕНІЯ ОТНОСИТЕЛЬНО РАВНО- ВѢСІЯ И ВНУТРЕННЯГО ДВИЖЕНІЯ СПЛОШНОЙ МАССЫ.

339. Указаніе метода. — Раньше, чѣмъ перейти къ спеціальному изученію совершенныхъ жидкостей, мы сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о равновѣсіи и внутреннемъ движеніи произвольной сплошной среды: упругаго твердаго тѣла, жидкости или газа, обладающихъ вязкостью.

Общія уравненія равновѣсія или движенія получаются при помощи метода, основаннаго на примѣненіи слѣдующей теоремы, вытекающей изъ уравненій п. 210:

Въ любой системѣ, находящейся въ состояніи равновѣсія или въ движеніи, внѣшнія силы и силы инерціи въ каждый моментъ удовлетворяютъ шести уравненіямъ равновѣсія системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

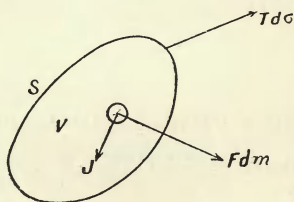
Примѣнимъ эту теорему сперва къ цѣлой системѣ, а затѣмъ къ ея произвольной части, мысленно отдѣленной отъ цѣлаго.

340. Внѣшнія силы, приложенныя къ сплошной массѣ. Шесть общихъ уравненій равновѣсія и движенія. — Представимъ себѣ сплошную матеріальную систему въ состояніи равновѣсія

или движенья. Въ моментъ t эта система занимаетъ опредѣленный объемъ V , ограниченный поверхностью S (фиг. 191); примѣромъ можетъ служить газъ въ оболочкѣ, жидкость и т. д.

Внѣшнія силы, дѣйствующія на элементы системы, можно раздѣлить на два класса:

1° Существуютъ внѣшнія силы, дѣйствующія на элементы объема, напримѣръ, непосредственно приложенныя силы, какъ вѣсъ. Пусть $d\tau$ будетъ одинъ изъ этихъ элементовъ объема, dm — его масса и $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ плотность среды въ элементѣ $d\tau$. Мы допустимъ, что сила, дѣйствующая на элементъ dm , есть величина того же по-



Фиг. 191.

рядка, что и элементъ, и обозначимъ ея напряженіе черезъ Fdm , или $F\rho d\tau$; коэффициентъ F есть сила, дѣйствующая на элементъ dm и отнесенная къ единицѣ массы.

2° Существуютъ, кромѣ того, внѣшнія силы, дѣйствующія на элементы поверхности тѣлъ, напримѣръ, давленія, производимыя стѣнками сосуда на поверхностные элементы массы газа, содержащейся въ этомъ сосудѣ. Назовемъ черезъ $d\sigma$ элементъ поверхности и допустимъ, что на этотъ элементъ дѣйствуетъ сила порядка $d\sigma$; мы обозначимъ ее черезъ $Td\sigma$ и назовемъ коэффициентъ T напряженіемъ въ этомъ элементѣ $d\sigma$, отнесеннымъ къ единицѣ поверхности. Сила $Td\sigma$ есть элементарное напряженіе въ элементѣ $d\sigma$. Эта сила, вообще, наклонена къ элементу $d\sigma$ подъ угломъ, отличнымъ отъ прямого; въ частномъ случаѣ, когда она направлена внутрь относительно поверхности, ограничивающей тѣло, она называется давленіемъ; когда она направлена наружу, она называется натяженіемъ.

Шесть необходимыхъ уравненій равновѣсія и движенія. — Напишемъ шесть всеобщихъ уравненій равновѣсія между внѣшними силами и силами инерціи, т. е. три уравненія проекцій количествъ движенія и три уравненія моментовъ количествъ движенія.

Внѣшнюю силу, дѣйствующую на элементъ объема $d\tau$, мы обозначили черезъ $F_0 d\tau$; черезъ X, Y, Z обозначимъ проекціи на три оси силы F , т. е. силы, отнесенной къ единицѣ массы; проекціи силы $F_0 d\tau$ будутъ $X_0 d\tau, Y_0 d\tau, Z_0 d\tau$.

Назовемъ, съ другой стороны, черезъ J ускореніе матеріальнаго элемента $dm = \rho d\tau$, и черезъ J_x, J_y, J_z три проекціи этого ускоренія на координатныя оси; сила инерціи элемента dm равна $-Jdm$ или $-J\rho d\tau$; ея проекціи равны

$$-J_x \rho d\tau, \quad -J_y \rho d\tau, \quad -J_z \rho d\tau.$$

Наконецъ, черезъ $T d\sigma$ мы обозначили внѣшнюю силу, или элементарное напряженіе, въ элементѣ $d\sigma$ ограничивающей поверхности; назовемъ черезъ T_x, T_y, T_z проекціи силы T на три оси; проекціи силы $T d\sigma$ будутъ:

$$T_x d\sigma, \quad T_y d\sigma, \quad T_z d\sigma.$$

Моменты силы $F_0 d\tau$ около трехъ осей равны

$$\rho (yZ - zY) d\tau, \quad \rho (zX - xZ) d\tau, \quad \rho (xY - yX) d\tau,$$

гдѣ x, y, z — координаты элемента объема $d\tau$; точно такъ же моменты силы инерціи равны

$$-\rho (yJ_z - zJ_y) d\tau, \quad -\rho (zJ_x - xJ_z) d\tau, \quad -\rho (xJ_y - yJ_x) d\tau;$$

наконецъ, моменты силы $T d\sigma$ равны

$$(yT_z - zT_y) d\sigma, \quad (zT_x - xT_z) d\sigma, \quad (xT_y - yT_x) d\sigma,$$

гдѣ x, y, z — координаты элемента поверхности $d\sigma$.

Напишемъ, что сумма проекцій этихъ силъ $F_0 d\tau, -J_0 d\tau, T d\sigma$ на каждую ось и сумма моментовъ этихъ силъ около каждой оси равны нулю; мы получимъ такимъ образомъ шесть необходимыхъ

уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int \int \int_V \varrho (X - J_x) d\tau + \int \int_S T_x d\sigma &= 0, \\ \int \int \int_V \varrho (Y - J_y) d\tau + \int \int_S T_y d\sigma &= 0, \\ \int \int \int_V \varrho (Z - J_z) d\tau + \int \int_S T_z d\sigma &= 0, \\ \int \int \int_V \varrho (yZ - zY - yJ_z + zJ_y) d\tau + \int \int_S (yT_z - zT_y) d\sigma &= 0, \\ \int \int \int_V \varrho (zX - xZ - zJ_x + xJ_z) d\tau + \int \int_S (zT_x - xT_z) d\sigma &= 0, \\ \int \int \int_V \varrho (xY - yX - xJ_y + yJ_x) d\tau + \int \int_S (xT_y - yT_x) d\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Въ этихъ уравненіяхъ тройные интегралы распространены на объемъ V сплошной матеріальной системы, а двойные интегралы — на поверхность S , ограничивающую систему.

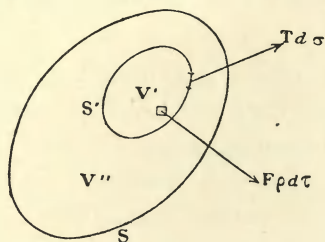
Мы получимъ шесть необходимыхъ условий равновѣсія, предполагая, что ускореніе J , а, слѣдовательно, его проеціи J_x, J_y, J_z равны нулю.

Замѣчаніе относительно седьмого всеобщаго уравненія движенія, — уравненія живыхъ силъ. — Примѣняя къ разсматриваемой системѣ теорему живыхъ силъ, слѣдовало бы написать, что дифференціалъ половины живой силы равенъ суммѣ элементарныхъ работъ внѣшнихъ силъ $FQd\tau$, $Td\sigma$ и внутреннихъ силъ. Но въ данной системѣ работы внутреннихъ силъ отличны отъ нуля, исключая нѣкоторые совершенно спеціальные случаи. Слѣдовательно, уравненіе живыхъ силъ будетъ содержать, вообще, силы, отличныя отъ тѣхъ внѣшнихъ силъ, которыя входятъ въ предыдущія формулы.

341. Произвольная часть системы. — Уравненія равновѣсія или внутренняго движенія. — Вообразимъ въ разсмотрѣнной нами выше сплошной матеріальной системѣ произвольную замкнутую поверхность S' (фиг. 192). Эта замкнутая поверхность дѣлитъ весь объемъ V на двѣ части: на часть V' внутри поверхности S' и часть V'' , заключенную между поверхностью S' и поверхностью S , ограничивающею систему. Къ объему V'' мы мо-

жемъ примѣнить все, что мы сейчасъ изложили относительно всего объема V . Внѣшнія силы, приложенныя къ сплошной матеріальной системѣ V' , будутъ двухъ родовъ.

Во-первыхъ, на каждый элементъ $d\tau$ объема V' дѣйствуетъ внѣшняя сила $F_q d\tau$, имѣющая проекціи $qX d\tau$, $qY d\tau$, $qZ d\tau$. Далѣе,



Фиг. 192.

въ каждомъ элементѣ $d\sigma$ поверхности S' имѣется элементарное напряженіе $T d\sigma$, представляющее дѣйствіе точекъ системы V'' , прилежащихъ къ элементу $d\sigma$, на точки системы V' , прилежащія къ этому элементу. Это приводитъ къ тому, что мы можемъ, ничего не измѣняя въ состояніи матеріальной системы V' , отбросить систему V'' , сохранивъ силы $F_q d\tau$, приложенныя къ элементамъ массы системы V' , и приложивъ къ элементамъ $d\sigma$ поверхности S' силы $T d\sigma$. Эти силы $T d\sigma$ обусловливаются дѣйствіемъ точекъ системы V'' , находящихся въ контактѣ съ ограничивающей поверхностью S' , на точки системы V' , также находящихся въ контактѣ съ этой поверхностью. Согласно принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія, точки системы V' , прилежащія къ поверхности S' , дѣйствуютъ на точки системы V'' , прилежащія къ этой же поверхности, съ силами, которыя равны и противоположны силамъ $T d\sigma$, приложеннымъ къ поверхностнымъ элементамъ $d\sigma$.

Согласно этому, мы можемъ примѣнить къ системѣ V' шесть уравненій движенія, написанныхъ выше для системы V :

$$\left. \begin{aligned} \iiint_{V'} \rho (X - J_x) d\tau + \iint_{S'} T_x d\sigma &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \iiint_{V'} \rho (yZ - zY - yJ_z + zJ_y) d\tau + \iint_{S'} (yT_z - zT_y) d\sigma &= 0, \\ \dots\dots\dots, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

гдѣ тройные интегралы взяты по объему V' , а двойные интегралы по ограничивающей поверхности S' . Эти уравненія имѣютъ мѣсто, какова бы ни была поверхность S' , мысленно проведенная внутри сплошной системы.

Въ случаѣ равновѣсія

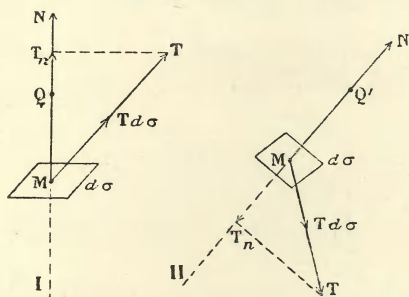
$$J_x = J_y = J_z = 0.$$

Замѣчаніе. — Полезно замѣтить, что внѣшнія силы $F_q d\tau$, приложенныя къ элементамъ объема V' , могутъ измѣняться въ зависимости отъ формы поверхности S' . Это бываетъ, напримѣръ, если элементы всей системы V взаимно притягиваются по закону Ньютона; если мы въ этомъ случаѣ проведемъ раздѣляющую поверхность S' , то въ число внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальный элементъ $q d\tau$ системы V' , войдетъ притяженіе этого элемента внѣшней частью V'' — притяженіе, которое, очевидно, измѣняется, когда поверхность S' измѣняетъ свою форму.

342. Напряженіе въ элементѣ $d\sigma$. — Если мы проведемъ въ средѣ поверхность S' , на которой возьмемъ элементъ $d\sigma$, имѣющій координаты x, y, z , то элементарное напряженіе въ этомъ элементѣ, какъ мы только-что видѣли, выразится нѣкоторой силой $T d\sigma$. Это напряженіе обусловливается дѣйствіемъ элементовъ среды, прилежащихъ къ элементу $d\sigma$ и находящихся внѣ поверхности S' , на элементы, прилежащіе къ нему изнутри. Отсюда вытекаетъ, что это напряженіе зависитъ лишь отъ положенія отдѣльнаго элемента $d\sigma$ въ средѣ, а не отъ поверхности S' , къ которой мы его относимъ; другими словами, напряженіе останется безъ измѣненія, если мы будемъ разсматривать элементъ $d\sigma$, какъ принадлежащій ко всякой другой поверхности, которая касается поверхности S' въ точкѣ x, y, z . Поэтому мы теперь можемъ говорить о напряженіи въ элементѣ $d\sigma$.

Разсмотримъ элементарную площадку $d\sigma$, находящуюся въ сплошной средѣ, въ точкѣ M , имѣющей координаты x, y, z (фиг. 193); на нормали къ этому элементу выберемъ положительное направленіе MN , опредѣляемое косинусами α, β, γ . Такимъ образомъ, элементъ $d\sigma$ имѣетъ двѣ стороны, положительную и отрицательную, при чемъ первая находится съ той же стороны, что и нормаль MN . Матеріальные элементы среды, прилежащіе къ площадкѣ $d\sigma$ съ отрицательной стороны, оказываютъ на матеріальные элементы, приле-

жащіе къ площадкѣ $d\sigma$ съ положительной стороны, дѣйствіе, которое можно замѣнить силой $Td\sigma$, приложенной къ элементу $d\sigma$; мы будемъ называть эту силу элементарнымъ напряженіемъ на отрицательной сторонѣ элемента $d\sigma$. Сила T есть напряжение на отрицательной сторонѣ, отнесенное къ единицѣ поверхности.



Фиг. 193.

Проекціи T_x , T_y , T_z силы T въ моментъ t суть функціи отъ x , y , z , α , β , γ , и, слѣдовательно, функціи отъ t , x , y , z , α , β , γ . Если система находится въ равновѣсїи, то эти функціи не содержать времени t .

Это напряженіе T есть давленіе, когда оно составляетъ съ нормалью MN острый уголъ (фиг. 193, I), и натяженіе, когда уголъ его съ нормалью MN —тупой (фиг. 193, II).

Согласно принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія матеріальные элементы, прилежащіе къ положительной сторонѣ, оказываютъ на матеріальные элементы, прилежащіе къ отрицательной сторонѣ, дѣйствіе, которое можно замѣнить силой $Td\sigma$, равной и противоположной предыдущей; эта сила есть элементарное напряженіе на положительной сторонѣ элемента $d\sigma$.

II. — ОБЩІЯ УРАВНЕНІЯ РАВНОВѢСІЯ И ДВИЖЕНІЯ СОВЕРШЕННОЙ ЖИДКОСТИ.

* 343. Совершенныя жидкости. — Тѣла жидкія и газообразныя носятъ общее названіе жидкостей (флюидовъ).

Для упрощенія проблемы въ рациональной механикѣ сперва разсматриваютъ воображаемые предметы, которые называются совершенными жидкостями и обладаютъ фиктивными свойствами; дѣй-

ствительныя жидкости тѣмъ болѣе сходны съ теоретическими, чѣмъ онѣ подвижныѣе и, наоборотъ, тѣмъ болѣе отличаются отъ нихъ, чѣмъ онѣ болѣе вязки.

Въ рамкахъ этого курса мы вынуждены ограничиться совершенными жидкостями. Эти жидкости характеризуются двумя слѣдующими свойствами:

1° въ совершенной жидкости, находящейся въ состояніи равновѣсія или движенія, внутреннія напряженія суть давленія;

2° эти давленія нормальны къ плоскимъ элементамъ, въ которыхъ они имѣютъ мѣсто.

Объяснимъ въ нѣсколькихъ словахъ смыслъ этихъ двухъ гипотезъ.

1° Жидкости, существующія въ дѣйствительности, почти несжимаемы; при постоянной температурѣ онѣ занимаютъ постоянный объемъ. Отсюда слѣдуетъ, что взаимодѣйствія молекулъ препятствуютъ ихъ сближенію. Кромѣ того, эти взаимодѣйствія препятствуютъ, но въ очень слабой степени, разъединенію молекулъ; это свойство выражаютъ, говоря, что жидкости обладаютъ сцѣпленіемъ. Пренебрегая сцѣпленіемъ, можно считать, что внутреннія напряженія, проявляющіяся въ жидкости, противодѣйствуютъ исключительно сближенію молекулъ, т. е. можно разсматривать эти напряженія, какъ давленія.

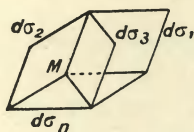
Газы же, напротивъ, могутъ какъ угодно расширяться и сжиматься. Для того, чтобы сжать газъ, его нужно подвергнуть давленію; слѣдовательно, взаимодѣйствія молекулъ газа препятствуютъ ихъ сближенію; но молекулы газа не оказываютъ никакого противодѣйствія разъединенію, такъ какъ онѣ сами собою стремятся удалиться одна отъ другой. Итакъ, въ газѣ внутреннія напряженія всегда суть давленія.

2° Если пренебречь вязкостью жидкостей, то можно принять, что молекулы жидкостей свободно скользятъ одна по другой, подъ какимъ бы давленіемъ онѣ ни находились. Поэтому реакція двухъ соприкасающихся молекулъ нормальна къ плоскому элементу соприкосновенія; давленія нормальны къ плоскимъ элементамъ, въ которыхъ они имѣютъ мѣсто.

Мы можемъ, слѣдовательно, примѣнить къ совершеннымъ жидкостямъ, находящимся въ состояніи равновѣсія или движенія, общія

разсужденія предыдущаго параграфа, предполагая, что напряженіе въ одной сторонѣ любого внутренняго элемента $d\sigma$ есть нормальное давленіе.

344. Опредѣленіе давленія въ точкѣ. — Возьмемъ точку M въ жидкой массѣ, находящейся въ состояніи равновѣсія или движенія. Разсмотримъ элементарныя площадки (фиг. 194) $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots, d\sigma_n$, проходящія черезъ точку M въ произвольномъ направленіи. На



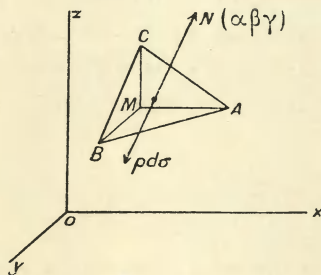
Фиг. 194.

каждой сторонѣ элемента $d\sigma_1$ дѣйствуетъ нормальное элементарное давленіе $p_1 d\sigma_1$, гдѣ p_1 есть нѣкоторый положительный множитель; на каждой сторонѣ элемента $d\sigma_2$ дѣйствуетъ давленіе $p_2 d\sigma_2, \dots$; на каждой сторонѣ элемента $d\sigma_n$ — давленіе $p_n d\sigma_n$.

Мы сейчас докажемъ, что

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p;$$

общее значеніе p этихъ количествъ называется давленіемъ въ точкѣ M .



Фиг. 195.

Для доказательства проведемъ черезъ точку M три прямая, параллельныя координатнымъ осямъ, и отложимъ на этихъ прямыхъ безконечно малые отрѣзки MA, MB, MC . На чертежѣ 195 предполагается, что эти отрѣзки направлены каждый въ положительную сторону соответственной оси. Проведя плоскость ABC , мы получимъ

элементарный тетраэдрь $MABC$; обозначимъ черезъ $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ грани BMC, CMA, AMB , перпендикулярныя соответственно къ осямъ Ox, Oy, Oz , и черезъ $d\sigma$ грань, лежащую противъ прямого трехграннаго угла; далѣе, обозначимъ черезъ α, β, γ направляющіе косинусы нормали N къ этой грани, считая положительной нормаль, направленную во внѣшнее относительно тетраэдра пространство. Проектируя грань $d\sigma$ на каждую изъ трехъ другихъ, получимъ:

$$d\sigma_1 = \alpha d\sigma, \quad d\sigma_2 = \beta d\sigma, \quad d\sigma_3 = \gamma d\sigma. \quad (3)$$

Такъ какъ тетраэдрь безконечно малъ, то грань ABC есть плоскій элементъ, предѣльное положеніе котораго проходитъ черезъ точку M .

Мы можемъ теперь разсматривать элементарный тетраэдрь, какъ свободный, подъ слѣдующими условіями:

1° Къ его объему $d\tau$ приложены внѣшняя сила, проекціи которой равны

$$\varrho X d\tau, \quad \varrho Y d\tau, \quad \varrho Z d\tau,$$

(ϱ обозначаетъ плотность въ точкѣ M), и сила инерціи, проекціи которой равны

$$-\varrho J_x d\tau, \quad -\varrho J_y d\tau, \quad -\varrho J_z d\tau;$$

2° Къ элементарнымъ площадкамъ $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma$ приложены нормальныя давленія $p_1 d\sigma_1, p_2 d\sigma_2, p_3 d\sigma_3, p d\sigma$; проекціи трехъ первыхъ давленій $p_1 d\sigma_1, p_2 d\sigma_2, p_3 d\sigma_3$ мы получимъ сейчасъ же, замѣчая, что давленія направлены по прямымъ, которыя соответственно параллельны осямъ Ox, Oy, Oz , и обращены каждое въ положительную сторону оси; проекціи давленія $p d\sigma$ равны

$$-p\alpha d\sigma, \quad -p\beta d\sigma, \quad -p\gamma d\sigma,$$

потому что оно прямо противоположно направленію (α, β, γ) внѣшней нормали къ грани ABC .

Такъ какъ сумма проекцій этихъ силъ на любую ось должна быть равна нулю, то проектируя на ось Ox , имѣемъ:

$$\varrho (X - J_x) d\tau + p_1 d\sigma_1 - p\alpha d\sigma = 0.$$

Подставивъ $\alpha d\sigma$ вмѣсто $d\sigma_1$, мы находимъ:

$$\varrho (X - J_x) \frac{d\tau}{d\sigma} + \alpha (p_1 - p) = 0.$$

Но отношеніе $\frac{d\tau}{d\sigma}$ равно нулю, такъ какъ оно выражаетъ треть высоты тетраэдра, опущенной изъ точки M , и эта высота бесконечно мала. Мы имѣемъ, слѣдовательно:

$$\alpha(p_1 - p) = 0.$$

Точно такъ же, проектируя на оси Oy и Oz , мы получимъ

$$\beta(p_2 - p) = 0, \quad \gamma(p_3 - p) = 0.$$

Слѣдовательно,

$$p = p_1 = p_2 = p_3.$$

Это и доказываетъ нашу теорему, такъ какъ предѣломъ грани, лежащей противъ прямого трехграннаго угла, служить проходящій черезъ точку M элементъ $d\sigma$ произвольнаго направленія, а соответствующій этой грани коэффициентъ p , равный общему значенію коэффициентовъ p_1, p_2, p_3 , не зависитъ отъ ориентировки элемента $d\sigma$.

Это количество p въ моментъ t есть положительная однозначная функція координатъ x, y, z точки M . На каждомъ элементѣ $d\sigma$, проходящемъ черезъ точку M , имѣется напряженіе, которое представляетъ собой нормальное давленіе $p d\sigma$.

Если единицей силы служить килограммъ-сила, а единицей длины метръ, то p есть давленіе, вычисленное въ килограммахъ и разсчитанное на квадратный метръ; мы можемъ также сказать, что по этой системѣ численное значеніе коэффициента p есть выраженная въ миллиметрахъ высота столба воды, который имѣетъ 1 квадратный метръ въ основаніи и вѣситъ p килограммовъ, такъ какъ столбъ воды, имѣющій 1 м.м. въ высоту и 1 квадратный метръ въ основаніи, вѣситъ 1 килограммъ.

★ 345. Уравненія движенія и равновѣсія совершенной жидкости. — Если мы въ жидкости, находящейся въ движеніи или въ состояніи равновѣсія, мысленно выдѣлимъ какой-нибудь объемъ V , ограниченный поверхностью S , то напряженіе $T d\sigma$ на элементѣ поверхности S есть нормальное давленіе $p d\sigma$. Поэтому, обозначивъ черезъ α, β, γ направляющіе косинусы внѣшней нормали къ элементу $d\sigma$ поверхности S , имѣемъ:

$$T_x = -p\alpha, \quad T_y = -p\beta, \quad T_z = -p\gamma.$$

Общая уравнения (2) п. 341 здесь примутъ слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \varrho (X - J_x) d\tau - \int \int_S p \alpha d\sigma &= 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \int \int \int_V \varrho (yZ - zY - yJ_z + zJ_y) d\tau - \int \int_S p (y\gamma - z\beta) d\sigma &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Грина, мы можемъ двойные интегралы

$$\int \int_S p \alpha d\sigma, \quad \int \int_S p y \gamma d\sigma, \quad \int \int_S p z \beta d\sigma$$

замѣнить тройными

$$\int \int \int_V \frac{\partial p}{\partial x} d\tau, \quad \int \int \int_V \frac{\partial (py)}{\partial z} d\tau, \quad \int \int \int_V \frac{\partial (pz)}{\partial y} d\tau;$$

соединивъ всѣ тройные интегралы подъ однимъ общимъ знакомъ, мы получимъ:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \left[\varrho (X - J_x) - \frac{\partial p}{\partial x} \right] d\tau &= 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \int \int \int_V \left\{ y \left[\varrho (Z - J_z) - \frac{\partial p}{\partial z} \right] - z \left[\varrho (Y - J_y) - \frac{\partial p}{\partial y} \right] \right\} d\tau &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

такъ какъ эти шесть уравненій должны имѣть мѣсто независимо отъ того, по какой части жидкости взяты интегралы, то уравненія должны также удовлетворяться и въ случаѣ бесконечно малаго объема V ; поэтому ихъ дифференціальные элементы равны нулю¹⁸⁾.

Мы получимъ такимъ образомъ шесть уравненій, которыя приводятся къ тремъ первымъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho (X - J_x), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho (Y - J_y), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho (Z - J_z). \quad (4)$$

Это — общія уравненія движенія совершенной жидкости. Уравненія равновѣсія мы получимъ, положивъ

$$J_x = J_y = J_z = 0.$$

III. — РАВНОВѢСІЕ ЖИДКОСТЕЙ. ГИДРОСТАТИКА.

✱ **346. Уравненія равновѣсія.** — Какъ мы только-что видѣли, уравненія равновѣсія будутъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \quad (1)$$

Слѣдуетъ замѣтить, что эти уравненія, выведенныя для равновѣсія совершенныхъ жидкостей, сохраняютъ силу также и для равновѣсія вязкихъ жидкостей; дѣйствительно, если въ вязкой жидкости внутреннія напряженія не всѣ будутъ нормальными давленіями, то соприкасающіеся элементы съ косо направленнымъ давленіемъ будутъ скользить одни по другимъ. Вязкость вліяетъ на уравненія лишь въ гидродинамикѣ.

Въ этихъ уравненіяхъ равновѣсія X , Y , Z , p и ρ будутъ однородными и конечными функціями координатъ x , y , z во всей массѣ жидкости, находящейся въ равновѣсіи. Функція p должна быть непрерывной во всѣхъ точкахъ жидкости, такъ какъ ея частныя производныя, согласно уравненіямъ (1), конечны; кромѣ того, эта функція должна оставаться положительной или равной нулю въ жидкости. Плотность ρ тоже будетъ положительной, но она можетъ имѣть разрывъ.

✱ **347. Единственное уравненіе равновѣсія. Геометрическая интерпретація.** — Пусть точка M будетъ точка (x, y, z) жидкой массы, а

$$M'(x + dx, y + dy, z + dz)$$

—какая-нибудь бесконечно близкая точка. Сложимъ уравненія (1), предварительно умноживъ ихъ соотвѣтственно на dx , dy , dz ; обозначивъ черезъ dp полный дифференціалъ функціи p , имѣемъ:

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \quad (2)$$

Это уравненіе, удовлетворяющееся при произвольныхъ значеніяхъ dx , dy , dz , представляетъ собой соединенное выраженіе трехъ уравненій (1). Оно имѣетъ простой смыслъ. Пусть F будетъ дѣйствующая въ точкѣ M сила, отнесенная къ единицѣ массы; уравненіе (2) выражаетъ, что разность dp давленій въ бесконечно близкихъ точкахъ

M и M' равна произведению плотности ρ въ точкѣ M на количество

$$F \cdot \overline{MM'} \cos \widehat{F.MM'},$$

аналогичное работѣ. Можно также сказать, что производная $\frac{dp}{MM'}$ давленія по данному направлению MM' равна произведению плотности въ точкѣ M на проекцію силы F на направление MM' :

$$\frac{dp}{MM'} = \rho F \cos \widehat{F.MM'}. \quad (3)$$

Это уравненіе даетъ условіе равновѣсія независимо отъ всякой системы осей. Изъ него можно вывести уравненія равновѣсія жидкостей въ какой-либо системѣ координатъ: для этого достаточно выразить условіе (3) въ принятой системѣ осей.

* 348. **Случай силовой функціи.** — Въ частномъ случаѣ, когда силы X, Y, Z суть производныя силовой функціи $U(x, y, z)$, мы имѣемъ

$$X dx + Y dy + Z dz = dU,$$

и уравненіе равновѣсія напишется такъ:

$$dp = \rho dU.$$

Безконечно малое измѣненіе давленія при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M' равно плотности, умноженной на безконечно малое приращеніе силовой функціи.

* 349. **Законы силъ, которыя въ состояніи удержать жидкость въ равновѣсіи.** — Когда жидкость находится въ равновѣсіи, количества p, ρ, X, Y, Z опредѣлены въ каждой точкѣ жидкости; они представляютъ собой, слѣдовательно, однозначныя функціи координатъ x, y, z ; важно, однако, замѣтить, что равновѣсіе возможно лишь въ томъ случаѣ, когда силы X, Y, Z удовлетворяютъ частному условію. Дѣйствительно, уравненіе (2) выражаетъ, что дифференціальное выраженіе

$$X dx + Y dy + Z dz, \quad (4)$$

будучи умножено на функцію ρ координатъ x, y, z , обращается въ полный дифференціалъ dp . Другими словами, плотность ρ есть интегрирующій множитель выраженія (4). Но для того, чтобы вы-

раженіе вида (4) допускало интегрирующаго множителя, т. е. могло быть отождествлено съ выраженіемъ вида $\psi d\varphi$, гдѣ ψ и φ суть функціи отъ x, y, z , необходимо и достаточно, какъ доказывается въ анализѣ, чтобы выполнялось равенство

$$X \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + Y \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + Z \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0. \quad (5)$$

Итакъ, для того, чтобы возможно было равновѣсіе, силы X, Y, Z , приложенныя къ жидкости, должны удовлетворять этому условію.

Условіе (5) удовлетворяется въ частности, когда сила X, Y, Z произведена силовой функціей U , такъ какъ въ этомъ случаѣ разности $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \dots$ тождественно равны нулю. Этотъ случай встрѣчается чаще всего.

*** 350. Характеристическое уравненіе жидкости.** — Когда мы разсматриваемъ опредѣленную жидкость, то плотность ρ , давленіе p и температура τ элемента объема жидкости связаны между собой характеристическимъ соотношеніемъ

$$\mathfrak{F}(p, \rho, \tau) = 0. \quad (6)$$

Напримѣръ, совершенный газъ, согласно законамъ Мариотта (Mariotte) и Гэ-Люссака (Gay-Lussac), удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{p}{\rho(1 + a\tau)} = \text{const.};$$

здѣсь a есть коэффиціентъ расширенія газа, равный $\frac{1}{273}$, когда температура τ вычисляется по стоградусной шкалѣ.

Въ случаѣ жидкости характеристическое соотношеніе не содержитъ коэффиціента p . Мы знаемъ, дѣйствительно, что жидкость почти несжимаема; плотность жидкости зависитъ поэтому не отъ ея давленія, но лишь отъ температуры, и въ извѣстныхъ предѣлахъ температуры имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + k\tau},$$

въ которомъ k есть коэффиціентъ расширенія жидкости при нагрѣваніи и ρ_0 — плотность при $\tau = 0$.

351. Поверхности уровня. — Представимъ себѣ массу жидкости въ состояніи равновѣсія; въ каждой точкѣ $M(x, y, z)$ этой

массы давленіе, плотность и температура имѣютъ опредѣленные значенія, такъ что p , ρ , τ суть однозначныя функціи координатъ x , y , z .

Поверхности, на которыхъ давленіе есть величина постоянная, $p = \text{const.}$, называются поверхностями уровня.

Поверхности $\rho = \text{const.}$ называются поверхностями равной плотности.

Поверхности $\tau = \text{const.}$ называются изотермическими.

Величины p , ρ , τ связаны характеристическимъ уравненіемъ жидкости; поэтому, если вдоль нѣкоторой линіи двѣ изъ этихъ величинъ остаются постоянными, то и третья также остается постоянной. Такимъ образомъ, кривая пересѣченія двухъ поверхностей $p = \text{const.}$ и $\tau = \text{const.}$ лежитъ на поверхности $\rho = \text{const.}$

Уравненія равновѣсія

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

показываютъ, что въ каждой точкѣ M жидкости сила (X, Y, Z) направлена по нормали къ той изъ поверхностей уровня, которая проходитъ черезъ эту точку, въ сторону возрастанія давленія p : дѣйствительно, проекціи X, Y, Z этой силы равны частнымъ производнымъ функціи p по x, y, z , дѣленнымъ на положительнаго множителя ρ .

352. Приложение къ тяжелымъ жидкостямъ. — Вообразимъ нѣкоторую массу тяжелой жидкости, имѣющую произвольную высоту и горизонтальное сѣченіе, достаточно малое для того, чтобы направленіе вертикали почти не измѣнялось при переходѣ отъ одной точки жидкости къ другой.

Направивъ ось Oz вертикально вверхъ, мы получимъ для проекцій силы, дѣйствующей на единицу массы, слѣдующія равенства:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g'.$$

Если высота разсматриваемой жидкости мала, то мы можемъ разсматривать ускореніе g' , какъ постоянное во всей жидкости и равное значенію g въ точкѣ O ; въ противномъ случаѣ g' убываетъ съ возрастаніемъ z .

Уравненіе равновѣсія (2) здѣсь обращается въ

$$dp = -\rho g' dz$$

Отсюда мы заключаемъ, что p есть функція только отъ z . Дѣйствительно, если будемъ перемѣщаться въ жидкости такъ, чтобы координата z оставалась постоянной, то $dz=0$, и уравненіе (7) показываетъ, что dp также есть нуль, т. е. p сохраняетъ постоянное значеніе. Имѣемъ, слѣдовательно:

$$p = \varphi(z).$$

Итакъ, поверхностями уровня служатъ горизонтальныя плоскости.

Уравненіе (7) даетъ теперь:

$$\rho g' = -\varphi'(z),$$

гдѣ φ' есть производная функціи φ . Такъ какъ g' есть функція отъ z , то ρ есть функція только отъ z ; слѣдовательно, поверхностями равной плотности также служатъ горизонтальныя плоскости; онѣ сливаются здѣсь съ поверхностями уровня.

Наконецъ, характеристическое уравненіе (6) жидкости показываетъ, что τ также есть функція лишь отъ z ; итакъ, изотермическими поверхностями тоже служатъ горизонтальныя плоскости.

Эти разсужденія могутъ быть примѣнены въ частности къ равновѣсію воды и воздуха подъ дѣйствіемъ силы вѣса. Отсюда мы заключаемъ, что столбъ атмосфернаго воздуха можетъ оставаться въ равновѣсіи лишь при условіи, чтобы температура и плотность были постоянными во всякой горизонтальной плоскости.

Разность давленій въ двухъ точкахъ. — Пусть M_0 и M будутъ двѣ точки, находящіяся соотвѣтственно на высотахъ z_0 , z ($z_0 < z$), и p_0 , p — давленія въ этихъ точкахъ. Интегрируя уравненіе (7), получимъ:

$$p_0 - p = \int_{z_0}^z \rho g' dz.$$

Разность давленій въ двухъ точкахъ равна вѣсу вертикальнаго цилиндра жидкости, который имѣетъ въ перпендикулярномъ сѣченіи одну квадратную единицу и ограниченъ двумя горизонтальными плоскостями, проходящими черезъ двѣ данныя точки. Дѣйствительно, если мы въ этомъ цилиндрѣ проведемъ два безконечно близкихъ перпендикулярныхъ сѣченія соотвѣтственно на высотахъ z и $z + dz$, то объемъ выдѣленной та-

кимъ образомъ части цилиндра будетъ dz , ея масса и вѣсъ выра-
зятся соотвѣтственно черезъ ϱdz и $\varrho g' dz$; слѣдовательно, вѣсъ всего

цилиндра равенъ $\int_{z_0}^z \varrho g' dz$.

Тяжелыя жидкости неодинаковой плотности, расположе-
женныя одна надъ другою. — Предположимъ, что двѣ тяжелыя
жидкости находятся въ состояніи равновѣсія одна надъ другой или
что поверхъ жидкости находится газъ. Найдемъ, какова будетъ по-
верхность раздѣла.

Вдоль этой поверхности давленіе должно быть одинаковымъ
въ обѣихъ жидкостяхъ, такъ какъ каждый элементъ поверхности
раздѣла долженъ испытывать одинаковое давленіе съ обѣихъ сто-
ронъ. Но въ одной изъ этихъ жидкостей

$$dp = -\varrho g' dz,$$

а въ другой, если назовемъ черезъ p_1 давленіе и черезъ ϱ_1 плот-
ность,

$$dp_1 = -\varrho_1 g' dz.$$

При любомъ перемѣщеніи вдоль поверхности раздѣла имѣемъ

$$dp - dp_1 = 0,$$

такъ какъ на этой поверхности $p = p_1$. Слѣдовательно, вдоль этой
поверхности

$$(\varrho_1 - \varrho) g' dz = 0,$$

т. е.

$$dz = 0, \quad z = \text{const.}$$

Мы видимъ, что поверхностью раздѣла служить гори-
зонтальная плоскость.

Такова, напримѣръ, свободная поверхность воды, соприкасаю-
щейся съ воздухомъ въ состояніи покоя.

353. Случай, когда существуетъ силовая функція. — Въ
разсмотрѣнномъ нами выше приложеніи къ тяжелымъ жидкостямъ
сила, отнесенная къ единицѣ массы, является производной силовой
функціи. Предположимъ, вообще, что существуетъ силовая функція,
и обозначимъ ее черезъ $U(x, y, z)$. Уравненіе равновѣсія будетъ
тогда

$$dp = \varrho dU.$$

Это уравненіе показываетъ прежде всего, что p есть функція лишь отъ U ; дѣйствительно, если перемѣститься въ жидкости такимъ образомъ, чтобы функція U оставалась постоянной, то $dU=0$, а потому $dp=0$, и p сохраняетъ постоянное значеніе. Отсюда вытекаетъ, что

$$p = \varphi(U).$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что поверхности равнаго давленія, или поверхности уровня, совпадаютъ съ поверхностями $U = \text{const}$.

Подставивъ $p = \varphi(U)$ въ уравненіе равновѣсія и обозначивъ черезъ φ' производную функціи φ , получимъ:

$$\varrho = \varphi'(U).$$

Итакъ, поверхности равной плотности сливаются съ поверхностями уровня.

Наконецъ, характеристическое уравненіе, связывающее количества p , ϱ , τ , показываетъ, что τ также есть функція отъ U , т. е. что изотермическія поверхности тоже совпадаютъ съ поверхностями уровня.

354. Приложение. Относительное равновѣсіе тяжелой жидкости, обладающей равномернымъ вращательнымъ движеніемъ вокругъ неподвижной вертикальной оси. — Вообразимъ тяжелую жидкость плотности ϱ , равномерно вращающуюся съ угловой скоростью ω вокругъ неподвижной оси Oz , направленной вертикально вверхъ. Изслѣдуемъ, можетъ ли эта жидкость быть въ состояніи равновѣсія относительно прямоугольныхъ осей Ox , Oy , Oz , вращающихся съ той же самой скоростью вокругъ оси Oz .

Для этой цѣли мы можемъ разсматривать подвижныя оси, какъ неподвижныя, подъ тѣмъ условіемъ, что къ вѣсу мы прибавимъ центробѣжную силу (п. 186). Обозначимъ черезъ dm элементъ массы, имѣющій координаты x , y , z ; проекціи на оси Ox , Oy , Oz вѣса этого элемента равны соотвѣтственно 0, 0, $-gdm$. Центробѣжная сила направлена по перпендикуляру, опущенному изъ разсматриваемаго элемента на ось Oz ; она стремится удалить элементъ отъ оси и имѣетъ напряженіе $\omega^2 r dm$, если черезъ r обозначимъ разстояніе элемента отъ оси. Поэтому проекціи центробѣжной силы на оси соотвѣтственно равны $\omega^2 x dm$, $\omega^2 y dm$, 0, а проекціи X , Y , Z результирующей силы, разсчитанной на единицу массы, равны:

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

Уравнение равновѣсія будетъ слѣдующее:

$$dp = \varrho [\omega^2 (x dx + y dy) - g dz].$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ сила X , Y , Z допускаетъ однозначную силовую функцію

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz,$$

и мы можемъ написать:

$$dp = \varrho dU.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, примѣнить къ этому примѣру всѣ заключенія, выведенныя нами въ предыдущемъ пунктѣ.

Поверхности уровня

$$U = \text{const.}$$

представляютъ собой параболоиды вращения вокругъ оси Oz ; они всѣ равны между собой, и параметръ меридиональной параболы равенъ $\frac{g}{\omega^2}$.

Если предположить, что жидкость соприкасается съ воздухомъ въ состояніи покоя, то свободная поверхность жидкости есть поверхность уровня, потому что на ней давленіе постоянно и равно атмосферному давленію p_a . Произвольная константа, входящая въ уравненіе свободной поверхности, опредѣляется изъ того условія, что масса жидкости, ограниченная стѣнками сосуда и свободной поверхностью, имѣетъ данную величину.

Если жидкость находится при постоянной температурѣ, то ϱ есть величина постоянная; интегрируя уравненіе равновѣсія, получимъ

$$p = \varrho \left[\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz + c \right],$$

гдѣ c есть константа. Свободная поверхность выражается уравненіемъ

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz = c',$$

въ которомъ c' есть другая константа, опредѣляемая изъ указаннаго выше условія. Затѣмъ мы получимъ c , написавъ, что на свободной поверхности $p = p_a$, и потому

$$p_a = \varrho (c + c').$$

Разсмотримъ слѣдующій частный случай. Сосудъ имѣетъ форму цилиндра вращенія вокругъ оси Oz , радіуса R ; когда сосудъ находится въ состояніи покоя, жидкость, которая предполагается однородной, достигаетъ уровня h . Сосудъ вращаютъ со скоростью ω , при чемъ предполагается, что дно сосуда не обнажается.

Возьмемъ начало O на днѣ сосуда. Объемъ жидкости остается равнымъ $\pi R^2 h$. Этотъ объемъ равенъ двойному интегралу

$$V = \int \int z \, dx \, dy = \int \int r z \, d\theta \, dr,$$

взятому по всему дну сосуда, гдѣ r и θ суть полярныя координаты точки на днѣ, а z — координата поверхности, при чемъ

$$z = \frac{1}{g} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - c' \right).$$

Интегрируя по θ между предѣлами 0 и 2π и по r между 0 и R , мы найдемъ:

$$V = \frac{\pi R^2}{g} \left(\frac{\omega^2 R^2}{4} - c' \right).$$

Написавъ, что этотъ объемъ равенъ $\pi R^2 h$, мы получимъ:

$$c' = \frac{\omega^2 R^2}{4} - gh.$$

При вычисленіи объема предполагается, что дно сосуда не обнажается, т. е. что $z > 0$ при всѣхъ значеніяхъ r ; необходимо, слѣдовательно, чтобы было $c' \leq 0$, или

$$\omega^2 \leq \frac{4gh}{R^2}.$$

Уравненіе свободной поверхности будетъ

$$\omega^2 (x^2 + y^2) - 2gz = \frac{\omega^2 R^2}{2} - 2gh.$$

Сѣченіе свободной поверхности плоскостью первоначальнаго уровня $z=h$ есть окружность, радіусъ которой $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ не зависитъ отъ ω . Координата z вершины свободной поверхности равна

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Точки свободной поверхности, лежащая на стѣнках цилиндра, получатся, если положимъ въ уравненіи этой поверхности $x^2 + y^2 = R^2$; мы найдемъ:

$$z_1 = h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Ясно, что вслѣдствіе вращенія уровень жидкости понижается по оси сосуда и повышается у стѣнокъ, при чемъ пониженіе равно повышенію.

Въ послѣднее время въ нѣкоторыхъ обсерваторіяхъ дѣлались попытки воспользоваться равномернымъ вращательнымъ движеніемъ ртутной бани для полученія совершеннаго параболическаго зеркала; подбирая надлежащимъ образомъ угловую скорость, можно варіировать по желанію параметръ меридіанальной параболы.

★ **355. Принципъ Архимеда.** — Вообразимъ жидкость, находящуюся въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ нѣкоторой системы силъ; назовемъ попрежнему черезъ F результирующую силу, рассчитанную на единицу массы и дѣйствующую на жидкость въ какой-нибудь точкѣ M .

Предположимъ, что твердое тѣло погружено въ эту жидкость и удерживается въ неподвижномъ состояніи. На каждый элементъ $d\sigma$ поверхности этого тѣла жидкость производитъ нормальное давленіе $p d\sigma$. Совокупность этихъ давленій составляетъ систему силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу; ихъ можно, слѣдовательно, замѣнить результирующей силой OR , приложенной къ произвольно выбранной точкѣ, и парой, ось которой OG есть результирующий моментъ около точки O всѣхъ давленій $p d\sigma$. Принципъ Архимеда даетъ простой способъ для вычисленія результирующей силы OR и пары OG .

Удалимъ мысленно твердое тѣло и, не трогая окружающей жидкости, замѣнимъ его жидкостью того же рода, подчиненной тому же закону дѣйствія силы F и расположенной такимъ образомъ, чтобы вся система, состоящая изъ первоначальной жидкости и той, которая замѣнила собой тѣло, оставалась въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ разсматриваемыхъ силъ. Возьмемъ въ частности совокупность силъ $F \rho d\tau$, дѣйствующихъ на элементы объема жидкости, замѣнившей тѣло; пусть OR' и OG' будутъ результи-

рующая сила и результирующий моментъ этихъ силъ около той же точки O . Мы докажемъ слѣдующую теорему:

Результирующая сила OR равна и противоположна результирующей OR' , моментъ OG равенъ и противоположенъ моменту OG' .

Дѣйствительно, къ жидкости, замѣстившей твердое тѣло, приложены слѣдующія внѣшнія силы:

- 1° давленія $p d\sigma$ на поверхность этой жидкости, тождественныя съ тѣми, которыя приложены къ точкамъ поверхности твердаго тѣла, и
- 2° силы $F q d\tau$, дѣйствующія на элементы объема $d\tau$ этой жидкости.

Такъ какъ жидкость, замѣнившая твердое тѣло, находится въ равновѣсіи, то приложенныя къ ней внѣшнія силы удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія системы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Совокупность давленій $p d\sigma$ и силъ $F q d\tau$ эквивалентна, слѣдовательно, нулю; или, что сводится къ тому же, результирующая сила OR и результирующий моментъ OG силъ $p d\sigma$ около точки O равны и противоположны главному вектору OR' и главному моменту OG' силъ $F q d\tau$ около той же точки.

Такимъ образомъ, теорема наша доказана.

Примѣръ: тѣло, погруженное въ тяжелую жидкость. — Вообразимъ тѣло, которое удерживается въ покоѣ въ тяжелой жидкости, находящейся въ состояніи равновѣсія. Система, состоящая изъ давленій $p d\sigma$, приложенныхъ къ элементамъ поверхности этого тѣла, и изъ силъ вѣса $g q d\tau$ объемныхъ элементовъ тяжелой жидкости, которою нужно было бы замѣнить погруженное тѣло, чтобы сохранить равновѣсіе окружающей жидкости, эквивалентна нулю.

Такъ какъ вертикальныя силы $g q d\tau$ эквивалентны одной силѣ, равной вѣсу жидкости, которою нужно было бы замѣнить твердое тѣло, то давленія $p d\sigma$ жидкости на тѣло имѣютъ лишь одну результирующую, равную и противоположную вѣсу жидкости, которою нужно было бы замѣнить тѣло. Для краткости говорить, что тѣло выталкивается тяжелой жидкостью съ силой, которая равна и прямо противоположна вѣсу вытѣсненной жидкости.

Этотъ результатъ приложимъ къ тѣлу, погруженному въ воздухъ, остающійся въ покоѣ, или въ воду, остающуюся въ покоѣ, или же частью въ воздухъ, частью въ воду.

IV.—ДАВЛЕНИЕ НА ПЛОСКУЮ ПЛОЩАДКУ ВЪ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВЪ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМЪ РАВНОВѢСІИ.

356. Опреѣленіе. Принципъ Паскаля. — Когда температура постоянна во всей массѣ жидкости, находящейся въ равновѣсіи, равновѣсіе называется изотермическимъ.

Въ жидкости, имѣющей постоянную температуру, плотность тоже остается постоянной; характеристическое уравненіе приводится къ виду $\rho = \text{const.}$ Изъ уравненія равновѣсія

$$\frac{dp}{\rho} = dU$$

выводится непосредственно уравненіе

$$\frac{p - p_0}{\rho} = U - U_0,$$

которое опредѣляетъ давленіе въ каждой точкѣ, если извѣстно давленіе въ одной какой-либо точкѣ M_0 .

Предположимъ, что мы какъ-нибудь измѣнимъ давленіе въ нашей точкѣ M_0 , давъ ему значеніе $p_0 + \delta p_0$; при этомъ установится новое состояніе равновѣсія, и въ какой-нибудь точкѣ M жидкости давленіе получитъ новое значеніе $p + \delta p$. Количества же ρ , U , U_0 не измѣняются. Новое уравненіе равновѣсія, слѣдовательно, будетъ имѣть такой видъ:

$$\frac{p + \delta p - p_0 - \delta p_0}{\rho} = U - U_0.$$

Сравнивая это уравненіе съ предыдущимъ, получимъ:

$$\delta p = \delta p_0.$$

Итакъ, въ жидкости, находящейся въ изотермическомъ равновѣсіи, давленіе передается безъ измѣненія по всѣмъ направленіямъ. Въ этомъ заключается принципъ Паскаля; важнымъ приложеніемъ этого принципа является гидравлическій прессъ.

Мы рассмотримъ въ частности изотермическое равновѣсіе тяжелыхъ жидкостей, взятыхъ въ столь небольшомъ объемѣ, что напряженіе силы тяжести и направленіе вертикали можно считать неизмѣнными во всей массѣ жидкости.

357. Давленіе въ точкѣ. — Рассмотримъ тяжелую жидкость въ состояніи изотермическаго равновѣсія; плотность ρ въ такомъ случаѣ есть величина постоянная. Направимъ ось Oz вертикально внизъ; единственное уравненіе равновѣсія будетъ

$$dp = \rho g dz,$$

гдѣ g есть постоянная.

Вѣсъ ω единицы объема жидкости опредѣляется равенствомъ

$$\omega = \rho g,$$

и уравненіе равновѣсія приводится къ виду

$$dp = \omega dz,$$

откуда

$$p - p_0 = \omega (z - z_0), \quad (1)$$

гдѣ p_0 есть давленіе на высотѣ z_0 . Такъ какъ мы предполагаемъ, что въ соприкосновеніи съ воздухомъ жидкость находится въ состояніи покоя, то свободная поверхность горизонтальна. Предположимъ, что для этой свободной поверхности $z = z_0$; тогда давленіе на этой свободной поверхности равно p_0 , т. е. атмосферному давленію. Формула (1) даетъ давленіе p въ произвольной точкѣ.

358. Плоскость нулевого давленія. — Мы можемъ написать:

$$p = \omega \left(z - z_0 + \frac{p_0}{\omega} \right),$$

выраженіе вида

$$p = \omega (z - z_1), \quad (2)$$

гдѣ

$$z_1 = z_0 - \frac{p_0}{\omega}.$$

Плоскость $z = z_1$ называется плоскостью нулевого давленія; она лежитъ на высотѣ $\frac{p_0}{\omega}$ надъ свободной поверхностью.

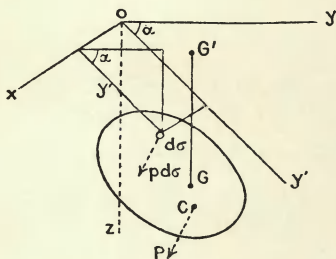
Сообразно съ формулой (2), давленіе въ жидкости имѣетъ такую же величину, какъ если бы атмосфера была удалена и уровень жидкости повысился до плоскости нулевого давленія. Мы можемъ

также выразить это слѣдующимъ болѣе нагляднымъ образомъ: состояніе жидкости осталось бы безъ измѣненія, если бы мы удалили атмосферу и на свободной поверхности S_0 жидкости помѣстили бы слой той же жидкости, давленіе котораго на поверхность S_0 было бы равно атмосферному давленію; благодаря этой операціи уровень жидкости повысился бы до плоскости нулевого давленія.

Если принять плоскость нулевого давленія за плоскость xy , то $z_1=0$, и давленіе въ какой-нибудь точкѣ M жидкости выразится формулой

$$p = \omega z.$$

359. Давленіе на плоскую стѣнку. — Предположимъ, что сосудъ, содержащій жидкость, имѣетъ плоскую стѣнку, и рассмотримъ опредѣленную часть S этой стѣнки, ограниченную замкнутой кривой. Давленіе жидкости на различные элементы $d\sigma$ площади S представлено силами $p d\sigma$, нормальными къ стѣнкѣ и потому парал-



Фиг. 196.

лельными и обращенными въ одну сторону (фиг. 196). Онѣ допускаютъ, слѣдовательно, результирующую P , которая также нормальна къ стѣнкѣ и равна ихъ суммѣ:

$$P = \iint_S p d\sigma = \omega \iint_S z d\sigma.$$

Для геометрической интерпретаціи этой формулы обозначимъ черезъ G центръ тяжести поверхности S , которую мы будемъ считать однородной, и черезъ ζ разстояніе этой точки отъ плоскости нулевого давленія; тогда

$$\iint_S z d\sigma = \zeta S, \quad P = \omega \zeta S.$$

Итакъ, полное давленіе P на плоскую поверхность S выражается силой P , нормальной къ поверхности и равной вѣсу цилиндра жидкости, основаніемъ котораго служить площадь S , а высотой — разстояніе $GG' = \xi$ центра тяжести площади S до плоскости нулевого давленія.

Такъ какъ $\omega \xi$ есть давленіе въ центрѣ тяжести площади S , то мы можемъ также сказать, что полное давленіе на плоскую стѣнку равно площади стѣнки, умноженной на давленіе въ ея центрѣ тяжести.

360. Центр давленія. — Это полное давленіе P приложено къ точкѣ C , которая называется центромъ давленія; она опредѣляется непосредственно изъ формулъ, дающихъ центръ системы параллельныхъ силъ.

Предположимъ, что осью Ox служитъ сѣченіе плоскости стѣнки плоскостью нулевого давленія; проведемъ въ плоскости стѣнки ось Oy' , перпендикулярную къ оси Ox ; обозначимъ черезъ α уголъ yOy' плоскости стѣнки xOy' съ плоскостью xOy .

Пусть x и y' будутъ координаты элемента $d\sigma$ поверхности S относительно осей Ox , Oy' ; разстояніе z этого элемента отъ плоскости нулевого давленія равно

$$z = y' \sin \alpha,$$

и давленіе на этотъ элементъ есть

$$p = \omega z = \omega y' \sin \alpha.$$

Назовемъ черезъ x_1 и y'_1 координаты центра давленія C относительно осей Ox и Oy' ; напишемъ, что моментъ результирующей P около каждой изъ осей Ox и Oy' равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ давленій $p d\sigma$:

$$Px_1 = \iint p x d\sigma = \iint \omega x y' \sin \alpha d\sigma,$$

$$Py'_1 = \iint p y' d\sigma = \iint \omega y'^2 \sin \alpha d\sigma;$$

интегралы взяты по площади S . Подставивъ вмѣсто результирующей P ея значеніе

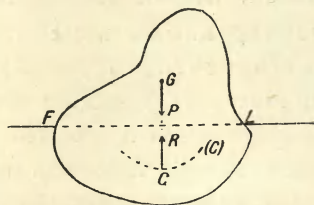
$$P = \iint p d\sigma = \iint \omega y' \sin \alpha d\sigma$$

и замѣтивъ, что множители ω и $\sin \alpha$ суть величины постоянныя,

образующимъ. Давленіе на элементъ $d\sigma$ стѣнки въ точкѣ M равно $\omega Mm'd\sigma$; поэтому, если бы мы поставили вертикально только - что построенный усѣченный цилиндръ, наполненный жидкостью, то давленіе на каждый элементъ $d\sigma$ было бы какъ разъ равно вѣсу вертикальнаго столба, имѣющаго основаніе $d\sigma$ въ усѣченномъ цилиндрѣ. Слѣдовательно, полное давленіе равно вѣсу этого жидкаго цилиндра $ABb'a'$, его точка приложенія C есть проекція центра тяжести G' усѣченнаго цилиндра на стѣнку.

V. — РАВНОВѢСІЕ ПЛАВАЮЩИХЪ ТѢЛЪ.

361. Условія, необходимыя для равновѣсія плавающего тѣла. — Тяжелое твердое тѣло, погруженное въ жидкость и пребывающее въ состояніи покоя, находится подъ дѣйствіемъ 1° своего вѣса P , приложеннаго къ центру тяжести G , и 2° выталкивающей силы R , равной вѣсу вытѣсненной жидкости и приложенной къ цен-



Фиг. 198.

тру тяжести C погруженнаго объема (фиг. 198). Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы эти двѣ силы были равны и прямо противоположны.

Итакъ: 1° прямая GC должна быть вертикальной; 2° если ω есть вѣсъ единицы объема жидкости и V — погруженный объемъ, то должно удовлетворяться уравненіе

$$P = \omega V.$$

362. Опредѣленія. — Плавающимъ тѣломъ мы будемъ называть замкнутое со всѣхъ сторонъ тяжелое твердое тѣло, вѣсъ котораго меньше вѣса равнаго объема воды. Можетъ случиться, что плавающія тѣла представляютъ собою полныя тѣла, открытыя сверху: примѣромъ можетъ служить судно; но если мы условимся разсматривать лишь такой наклонъ, при которомъ тѣло не можетъ

зачерпнуть жидкости, то мы, очевидно, можем считать тѣло замкнутымъ.

Плоскостью плаванія называется плоскость FL , отсѣкающая объемъ V такихъ размѣровъ, что вѣсъ объема V жидкости равенъ вѣсу P всего плавающего тѣла:

$$P = \omega V, \quad V = \frac{P}{\omega}.$$

Сѣченіе плавающего тѣла плоскостью плаванія есть плоская площадь, которая называется площадью плаванія.

Вытѣсненный объемъ (сagène). — Объемъ погруженной въ жидкость части тѣла, отсѣкаемой отъ плавающего тѣла плоскостью плаванія, называется вытѣсненнымъ объемомъ. Центръ тяжести вытѣсненного объема, рассматриваемаго, какъ однородное тѣло, называется центромъ вытѣсненного объема.

Если мы будемъ рассматривать всѣ плоскости плаванія, отсѣкающія отъ даннаго плавающего тѣла погруженные въ жидкость части объема V , то эти плоскости плаванія называются изокаренными.

Поверхность изокаренныхъ плоскостей, или поверхность (F); поверхность центровъ равныхъ вытѣсненныхъ объемовъ, или поверхность (C). — Дано плавающее тѣло. Рассмотрим огибающую изокаренныхъ плоскостей; это есть замкнутая поверхность (F), которой каждая плоскость плаванія касается въ одной точкѣ и которая называется поверхностью плоскостей плаванія.

Каждой изокаренной плоскости соотвѣтствуетъ центръ вытѣсненного объема; геометрическое мѣсто этихъ центровъ есть замкнутая поверхность (C), которая называется поверхностью центровъ вытѣсненныхъ объемовъ.

Поверхности (F) и (C) будутъ опредѣлены, если извѣстны вытѣсненный объемъ V и поверхность, ограничивающая плавающее тѣло.

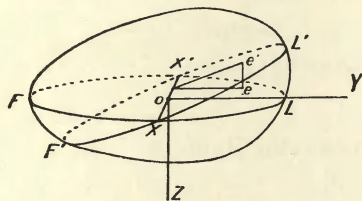
363. Первая теорема Дюпена (Dupin). — Точка касанія каждой плоскости плаванія съ поверхностью (F) лежитъ въ центрѣ тяжести соотвѣтствующей площади плаванія, если рассматривать ее, какъ однородную.

Доказательство основано на слѣдующей геометрической теоремѣ:

Если провести къ какой-нибудь поверхности касательную плоскость, то точка касанія лежитъ на прямой пере-

сѣченія этой плоскости съ какой-либо бесконечно близкой касательной плоскостью ¹⁹⁾.

Разсмотримъ (фиг. 199) двѣ бесконечно близкія плоскости плаванія FL и $F'L$, которыя пересѣкаются подъ угломъ θ ; возьмемъ прямоугольную систему координатъ, образуемую пересѣченіемъ OX обѣихъ плоскостей, перпендикуляромъ OY къ прямой OX въ пло-



Фиг. 199.

скости FL и, наконецъ, перпендикуляромъ OZ къ этой плоскости, направленнымъ внизъ.

Такъ какъ обѣ плоскости плаванія будутъ изокаренными, то объемы тѣлъ $LOXL'$ и $FOXF'$ равны. Обозначимъ черезъ $d\sigma$ элементъ плоскости XOY , содержащій точку e , черезъ X и Y — его координаты и черезъ Z — соотвѣтственную координату плоскости $F'L'$; очевидно, что

$$Z = Y \tan \theta.$$

Въ лѣвомъ клинообразномъ тѣлѣ FXF' координаты Z будутъ положительными, и объемъ этого тѣла равенъ интегралу

$$\iint Z d\sigma,$$

взятому по элементамъ $d\sigma$, находящимся слѣва отъ оси OX ; въ правомъ клинообразномъ тѣлѣ LXL' координаты Z будутъ отрицательными, и объемъ этого тѣла равенъ интегралу

$$- \iint Z d\sigma,$$

взятому по элементамъ $d\sigma$, лежащимъ справа отъ оси OX . Такъ какъ эти два интеграла равны, то ихъ разность равна нулю, и

$$\iint_{FL} Z d\sigma = 0;$$

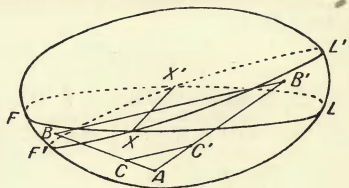
послѣдній интегралъ взять по всей площади плаванія FL . Замѣнивъ Z черезъ $Y \tan \theta$ и отбросивъ постоянный множитель $\tan \theta$,

получимъ, наконецъ, равенство

$$\int \int_{FL} Y d\sigma = 0,$$

въ которомъ интеграль взять по всей площади плаванія. Но это равенство выражаетъ, что центръ тяжести разсматриваемой площади плаванія, считая ее однородной, лежитъ на оси OX , т. е. на пересѣченіи разсматриваемой плоскости плаванія съ какой-нибудь безконечно близкой плоскостью плаванія. Теорема такимъ образомъ доказана.

364. Вторая теорема Дюпена. — Касательная плоскость въ точкѣ C поверхности центровъ вытѣсненныхъ объемовъ параллельна соотвѣтствующей плоскости плаванія. — Пусть C будетъ центръ вытѣсненного объема, отсѣкаемого плоскостью FL , C' — центръ вытѣсненного объема, отсѣкаемого плоскостью $F'L'$ (фиг. 200), и XX' прямая пересѣченія этихъ двухъ плоскостей плаванія. Эти два вытѣсненныхъ объема имѣютъ общую часть, лежащую ниже поверхности $F'XL$. Центръ тяжести этой части и ея объемъ, который мы будемъ считать однороднымъ, мы



Фиг. 200.

обозначимъ соотвѣтственно черезъ A и a . Клинообразныя тѣла LXL' и FXF' равновелики; ихъ центры тяжести мы обозначимъ соотвѣтственно черезъ B' и B , а ихъ общій объемъ черезъ b ; мы постоянно предполагаемъ, что эти объемы однородны и имѣютъ одну и ту же плотность.

Точка C есть центръ тяжести совокупности объемовъ a и b , центры тяжести которыхъ лежатъ соотвѣтственно въ точкахъ A и B ; слѣдовательно,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}.$$

Точно такъ же C' есть центръ тяжести совокупности объемовъ a и b , центры тяжести которыхъ лежатъ въ точкахъ A и B' ; поэтому

$$\frac{C'A}{C'B'} = \frac{b}{a}.$$

Такъ какъ точками C и C' прямая AB и AB' дѣлятся въ одинаковомъ отношеніи, то прямая CC' параллельна прямой BB' и направлена въ одну съ ней сторону.

Плоскость плаванія $F'L'$ безпредѣльно приближается къ FL , и потому точки B и B' , заключенныя между этими двумя плоскостями, стремятся перемѣститься въ плоскость FL ; точка C' стремится къ точкѣ C , а прямая CC' , параллельная прямой BB' , стремится занять предѣльное положеніе, параллельное плоскости FL .

Прямая въ этомъ предѣльномъ положеніи есть касательная въ точкѣ C къ поверхности центровъ вытѣсненныхъ объемовъ; такимъ образомъ, касательныя къ поверхности (C) въ точкѣ C параллельны соответствующей плоскости плаванія FL , что и требовалось доказать.

365. Положенія равновѣсія плавающего тѣла. — Въ случаѣ равновѣсія погруженная часть вытѣсняетъ въ жидкости объемъ

$$V = \frac{P}{\omega},$$

поэтому плоскость плаванія будетъ касаться свободной поверхности жидкости FL , если мысленно продолжимъ эту свободную поверхность въ плавающемъ тѣлѣ (фиг. 198). Кромѣ того, прямая GC вертикальна, т. е. перпендикулярна къ поверхности FL ; поэтому прямая GC нормальна въ точкѣ C къ поверхности центровъ вытѣсненныхъ объемовъ, ибо касательная плоскость въ точкѣ C къ этой поверхности параллельна поверхности FL .

Центръ вытѣсненнаго объема, соответствующаго положенію равновѣсія, совпадаетъ, слѣдовательно, съ основаніемъ нормали, проведенной изъ центра тяжести G къ поверхности центровъ вытѣсненныхъ объемовъ.

Обратно, всякой нормали GC , проведенной изъ точки G къ поверхности (C) , соответствуетъ положеніе равновѣсія, получаемое при погруженіи объема, центръ котораго совпадаетъ съ основаніемъ C разсматриваемой нормали.

Между получаемыми такимъ образомъ положеніями одни будутъ устойчивыми, а другія — неустойчивыми; мы не будемъ

здѣсь разсматривать вопроса объ устойчивости равновѣсія; читатель можетъ найти объ этомъ въ III томѣ курса Аппелля.

Примѣръ. — Разсмотримъ случай, когда плавающее тѣло ограничено эллипсоидомъ. Тогда поверхностью центровъ вытѣсненныхъ объемовъ служить эллипсоидъ, подобный первому и подобнымъ образомъ расположенный. Пусть

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad (1)$$

будетъ уравненіе данного эллипсоида, отнесенное къ его осямъ симметріи и

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda \quad (2)$$

уравненіе плоскости плаванія. Постоянная λ опредѣляется изъ условія, что вытѣсненный объемъ имѣетъ данную величину. Центръ вытѣсненнаго объема, соответствующаго плоскости (2), лежитъ на діаметрѣ, сопряженномъ съ этой плоскостью въ эллипсоидѣ (1), такъ какъ каждое сѣченіе эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости (2), разсматривается, какъ однородное, и его центръ тяжести совпадаетъ съ его центромъ симметріи. Поэтому координаты x, y, z центра вытѣсненнаго объема удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{Ax}{a} = \frac{By}{\beta} = \frac{Cz}{\gamma} \quad (3)$$

Съ другой стороны, касательная плоскость въ точкѣ $C(x, y, z)$ къ поверхности (1) центровъ вытѣсненныхъ объемовъ параллельна плоскости плаванія (2); поэтому при бесконечно маломъ перемѣщеніи dx, dy, dz по поверхности (1)

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

и, въ силу соотношеній (3),

$$Axdx + Bydy + Czdz = 0;$$

отсюда, интегрируя, получимъ:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.}; \quad (4)$$

константу мы опредѣлимъ, зная вытѣсненный объемъ. Мы получили уравненіе эллипсоида, подобнаго эллипсоиду (1) и подобнымъ образомъ расположеннаго.

Такъ какъ изъ данной точки можно провести къ эллипсоиду 2, 4 или 6 вещественныхъ нормалей, то мы видимъ, что могутъ существовать 2, 4 или 6 положеній равновѣсія.

ГЛАВА XVIII.

ДВИЖЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХЪ ЖИДКОСТЕЙ. ГИДРОДИНАМИКА.

✱ 366. Уравненія движенія. — Сохраняя тѣ же обозначенія, что въ п. 345, положимъ, что ϱ есть плотность жидкости въ точкѣ $M(x, y, z)$, p — давленіе въ этой точкѣ, $dm = \varrho d\tau$ — масса элемента жидкости $d\tau$ въ точкѣ M и Xdm , Ydm , Zdm — проекціи силы Fdm , приложенной къ объему $d\tau$; обозначимъ, наконецъ черезъ J_x , J_y , J_z проекціи ускоренія J элемента dm въ моментъ t . Уравненія движенія будутъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho (X - J_x), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varrho (Y - J_y), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho (Z - J_z). \quad (1)$$

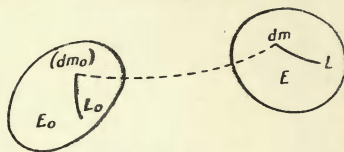
Обыкновенно эти уравненія пишутъ въ двухъ различныхъ видахъ, смотря по выбору независимыхъ переменныхъ.

I. — ПЕРЕМѢННЫЯ ЛАГРАНЖА.

✱ 367. Переменныя Лагранжа. — Разсмотримъ два положенія E_0 и E , занимаемая въ пространствѣ движущейся жидкой массой въ моменты t_0 и t , $t_0 < t$ (фиг. 201).

Определенный элементъ жидкости dm , координаты котораго въ моментъ t равны x, y, z , въ начальный моментъ $t = t_0$ занималъ определенное положеніе $(dm)_0$, которому соотвѣтствуютъ координаты a, b, c . При движеніи рассматриваемый элементъ выходитъ изъ начальнаго положенія $(dm)_0$, перемѣщается по нѣкоторой траекто-

рии и въ моментъ t находится въ положеніи dm на этой траекторіи; равнымъ образомъ другой элементъ выходитъ изъ другого начального положенія, перемѣщается по другой траекторіи и въ моментъ t будетъ занимать нѣкоторое положеніе на этой траекторіи. Такимъ образомъ, рассматривая совокупность элементовъ $(dm)_0$ среды въ мо-



Фиг. 201.

ментъ t_0 , мы найдемъ, что они занимаютъ сплошную область пространства E_0 ; эти элементы сплошной массой совершаютъ движеніе, и въ моментъ t они занимаютъ положенія dm , заполняющія сплошную область E .

Координаты x, y, z каждаго элемента dm въ моментъ t суть однозначныя и непрерывныя функціи его начальныхъ координатъ a, b, c и времени t :

$$x = f(a, b, c, t), \quad y = f_1(a, b, c, t), \quad z = f_2(a, b, c, t); \quad (2)$$

при $t = t_0$ эти функціи равны соотвѣтственно a, b, c .

Четыре количества a, b, c, t суть независимыя перемѣнныя, выбранныя Лагранжемъ.

Изъ непрерывности функцій (2) вытекаютъ нѣкоторыя общія весьма простыя слѣдствія.

Если мы рассматриваемъ въ массѣ E_0 рядъ матеріальныхъ точекъ, составляющихъ непрерывную линію L_0 , то новыя положенія этихъ точекъ въ массѣ E также образуютъ непрерывную линію L . Дѣйствительно, мы можемъ выразить координаты a, b, c произвольной точки P_0 линіи L_0 въ непрерывныхъ функціяхъ нѣкотораго параметра λ :

$$a = \varphi(\lambda), \quad b = \varphi_1(\lambda), \quad c = \varphi_2(\lambda). \quad (3)$$

такъ, чтобы при измѣненіи λ отъ α до β мы получили послѣдовательно всѣ точки линіи L_0 , при чемъ значенія α и β параметра будутъ соотвѣтствовать двумъ концамъ линіи. Если мы въ формулахъ (2) дадимъ перемѣнной t численное значеніе и замѣнимъ a, b, c выраженіями (3), то увидимъ, что координаты x, y, z также

суть непрерывныя функции параметра λ ; когда λ измѣняется отъ значенія α до β , точка $P(x, y, z)$ описываетъ, слѣдовательно, въ массѣ E непрерывную линію L .

Если линія L_0 замкнута, то ея два конца сливаются въ одну точку, которая получится при двухъ значеніяхъ $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$. Отсюда слѣдуетъ, что и два конца линіи L тоже сольются, и линія L также будетъ замкнутой кривой.

Если мы примемъ, что координаты a, b, c суть непрерывныя функции двухъ параметровъ λ, μ , то убѣдимся точно такъ же, что поверхности S_0 , взятой въ массѣ E_0 , соотвѣтствуетъ поверхность S въ массѣ E . Если поверхность S_0 замкнута, то и поверхность S также замкнута; въ этомъ случаѣ точкѣ P_0 , лежащей внутри поверхности S_0 , соотвѣтствуетъ точка P , лежащая внутри S . Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что P_0 есть точка внутри поверхности S_0 ; матеріальныя точки, лежавшія вначалѣ на поверхности S_0 , перемѣщаются такимъ образомъ, что въ любой моментъ t' , заключенный между t_0 и t , онѣ находятся на подвижной поверхности S' , которая, принадлежа положенію E' жидкой массы въ моментъ t' , соотвѣтствуетъ точка въ точку поверхности S_0 и въ моментъ t совпадаетъ съ поверхностью S . Одновременно съ этимъ перемѣщается точка, занимавшая вначалѣ положеніе P_0 внутри поверхности S_0 ; она все время остается внутри подвижной поверхности S' . Дѣйствительно, если бы точка могла выйти оттуда, то существовалъ бы моментъ t' , въ который эта точка занимала положеніе P' на поверхности S' . Но въ такомъ случаѣ точки P_0 и P' соотвѣтствовали бы одна другой въ положеніяхъ E_0 и E' , что невозможно, потому что точкѣ P' , лежащей на поверхности S' , должна соотвѣтствовать точка, лежащая на поверхности S_0 , а не точка P_0 внутри пространства, ограничиваемаго поверхностью S_0 .

Напримѣръ, когда вода движется въ стаканѣ безъ толчковъ и безъ разрывовъ сплошности, то молекулы, которыя въ моментъ t_0 находились на свободной поверхности и на стѣнкахъ, образуютъ своего рода мѣшокъ, заключающій внутри себя всѣ остальные молекулы во все время движенія.

Спиральи дыма, выпускаемая курящими, представляютъ собою частицы дыма, занимающія объемы; частицы, находящіяся на поверхности, на ней же и остаются, образуя трубки, содержащія внутри себя остальные частицы дыма.

Скорость и ускореніе молекулы. — При помощи формулъ (2) мы можемъ прослѣдить молекулу x, y, z въ ея движеніи при измѣненіи t . Проекціи u, v, w ея скорости MW въ моментъ t равны

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

а проекціи ускоренія:

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad J_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad J_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (4)$$

Уравненія движенія. — Уравненія движенія (1) теперь напишутся такъ:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (5)$$

Въ этихъ уравненіяхъ предполагается, что p и ϱ выражены въ функціи отъ x, y, z, t . Чтобы сдѣлать явными независимыя переменныя Лагранжа a, b, c, t , достаточно замѣтить, что p и ϱ , будучи функціями отъ x, y, z , обращаются въ функціи отъ a, b, c черезъ посредство координатъ x, y, z , которыя, согласно формуламъ (2), представляютъ собой функціи отъ a, b, c . Въ частности, для давленія p имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial p}{\partial b} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial p}{\partial c} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Умноживъ эти уравненія на $\frac{1}{\varrho}$ и подставивъ вмѣсто производныхъ $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ ихъ значенія изъ уравненій движенія, мы получимъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial a} &= \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial b} &= \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \frac{\partial x}{\partial b} + \dots, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial c} &= \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \frac{\partial x}{\partial c} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ три уравненія, связывающія пять неизвѣстныхъ количествъ x, y, z, ρ и q , которыя нужно опредѣлить въ функціи отъ a, b, c, t .

Эту систему уравненій мы дополнимъ еще двумя другими: характеристическимъ уравненіемъ и уравненіемъ сплошности.

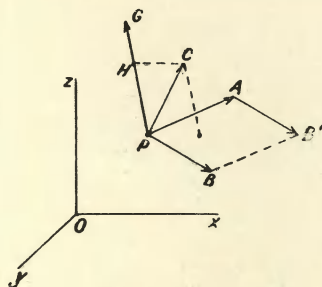
Характеристическое уравненіе. — Въ п. 350 мы указали уже характеристическое уравненіе

$$\mathfrak{H}(\rho, q, \tau) = 0, \quad (8)$$

которымъ выражается зависимость между давленіемъ, плотностью и температурой τ , и привели наиболѣ простые частные случаи.

* 368. Уравненіе сплошности. — То обстоятельство, что масса элемента жидкости остается постоянной, выражается уравненіемъ, которое называется уравненіемъ сплошности.

Чтобы получить это уравненіе, выведемъ сперва элементарную формулу, выражающую объемъ параллелепипеда, построеннаго на



Фиг. 202.

трехъ векторахъ PA, PB, PC (фиг. 202), которые выходятъ изъ одной точки и проекціи которыхъ соотвѣтственно равны $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ и (X_3, Y_3, Z_3) . Мы предполагаемъ, что трехгранный уголъ $PABC$ находится въ прямомъ положеніи относительно трехграннаго угла координатныхъ осей (см. примѣч. 12-ое въ первомъ выпускѣ).

Площадь основанія APB параллелепипеда измѣряется тѣмъ же числомъ, что и моментъ PG около точки P вектора AB' , геометрически равнаго вектору PB . Если принять на мгновеніе точку P за начало системы осей, параллельныхъ осямъ $Oxyz$, то проекціи век-

тора AB' равны X_2, Y_2, Z_2 , и координаты его точки приложенія A равны X_1, Y_1, Z_1 ; поэтому проекціи L, M, N его момента PG равны:

$$L = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad M = Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \quad N = X_1 Y_2 - Y_1 X_2.$$

Высота h параллелоипеда есть разстояніе точки C отъ плоскости APB , т. е. проекція PH вектора PC на перпендикуляръ PG къ этой плоскости:

$$h = PC \cos CPG.$$

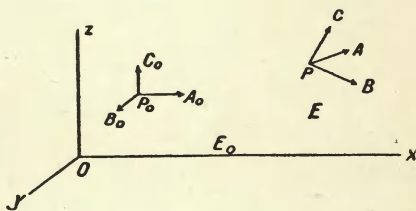
Такъ какъ основаніе параллелоипеда измѣряется тѣмъ же числомъ, что и моментъ PG , то объемъ параллелоипеда равенъ

$$\begin{aligned} V &= PG.h \\ &= PG.PC \cos CPG \\ &= LX_3 + MY_3 + NZ_3 \\ &= (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) X_3 + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) Y_3 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) Z_3; \end{aligned}$$

это выраженіе можно также написать въ видѣ определителя

$$V = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Если бы трехгранный уголъ $PABC$ былъ въ обратномъ положеніи относительно трехграннаго угла осей, то предыдущее



Фиг. 203.

выраженіе было бы равно объему параллелоипеда, взятому со знакомъ минусъ.

Теперь представимъ себѣ въ моментъ t_0 находящійся въ жидкости E_0 (фиг. 203) безконечно малый параллелопедъ Π_0 , вершиной котораго служить точка P_0 съ координатами a, b, c и коего ребра $P_0 A_0$,

P_0B_0, P_0C_0 соответственно параллельны осямъ и имѣютъ длины, соответственно равныя da, db, dc ; объемъ этого параллелепипеда равенъ

$$(d\tau)_0 = da db dc,$$

а его масса равна $\rho_0 dadbdc$, при чемъ черезъ ρ_0 обозначаетъ плотность въ точкѣ P_0 . Вслѣдствіе движенія жидкости параллелепипедъ Π_0 въ моментъ t обращается въ параллелепипедъ Π , ребрами котораго служатъ три элемента PA, PB, PC , въ которые переходятъ три элемента P_0A_0, P_0B_0, P_0C_0 . Точка P_0 въ моментъ t занимаетъ положеніе P , координаты котораго x, y, z опредѣляются уравненіями (2):

$$(P) \quad x = f(a, b, c, t), \quad y = f_1(a, b, c, t), \quad z = f_2(a, b, c, t).$$

Точка A_0 переходитъ въ точку A , имѣющую координаты

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = f(a + da, b, c, t) & y_1 = f_1(a + da, b, c, t) \\ z_1 = f_2(a + da, b, c, t), \end{cases}$$

откуда, разлагая по строкѣ Маклорена и сохраняя лишь члены перваго порядка, получаемъ

$$(A) \quad x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial a} da, \quad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial a} da, \quad z_1 = z + \frac{\partial z}{\partial a} da,$$

Слѣдовательно, проекціи вектора PA равны

$$(PA) \quad X_1 = \frac{\partial x}{\partial a} da, \quad Y_1 = \frac{\partial y}{\partial a} da, \quad Z_1 = \frac{\partial z}{\partial a} da.$$

Точно такъ же проекціи векторовъ PB и PC равны соответственно:

$$(PB) \quad X_2 = \frac{\partial x}{\partial b} db, \quad Y_2 = \frac{\partial y}{\partial b} db, \quad Z_2 = \frac{\partial z}{\partial b} db,$$

$$(PC) \quad X_3 = \frac{\partial x}{\partial c} dc, \quad Y_3 = \frac{\partial y}{\partial c} dc, \quad Z_3 = \frac{\partial z}{\partial c} dc.$$

Такимъ образомъ объемъ параллелепипеда Π равенъ

$$d\tau = D da db dc = D d\tau_0, \quad (9)$$

гдѣ

$$D = \frac{\partial x}{\partial c} \left(\frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} \right) + \frac{\partial y}{\partial c} \left(\frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} \right) + \frac{\partial z}{\partial c} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} \right); \quad (10)$$

масса этого параллелепипеда есть $dm = \rho d\tau$, гдѣ ρ обозначаетъ

плотность въ точкѣ P въ моментъ t . Такъ какъ масса элемента dm не измѣнилась, $dm = (dm)_0$, то

$$\varrho d\tau = \varrho_0 d\tau_0,$$

т. е., въ силу равенства (9),

$$\varrho D = \varrho_0. \quad (11)$$

Это и есть уравненіе сплошности.

Количество D можно написать въ видѣ опредѣлителя:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

369. Заключение. — Мы имѣемъ такимъ образомъ пять уравненій (7), (8) и (11), содержащихъ переменныя $x, y, z, p, \varrho, \tau$, которыя мы рассматриваемъ, какъ функціи отъ a, b, c, t . Поэтому для того, чтобы число уравненій было равно числу неизвѣстныхъ, необходимо принять дополнительную гипотезу относительно жидкости; въ этомъ отношеніи простѣйшими гипотезами будутъ двѣ слѣдующія:

1° Жидкость остается при постоянной температурѣ $\tau = \text{const.}$ — Въ частномъ случаѣ несжимаемой жидкости при постоянной температурѣ имѣемъ:

$$\tau = \text{const.} \quad \text{и} \quad \varrho = \text{const.}$$

2° Жидкость представляетъ собой газъ, подвергающійся адиабатическому превращенію.

Если газъ движется такимъ образомъ, что его элементы, находящіеся въ движеніи, внезапно расширяется или сжимаются, то ихъ температура измѣняется; если же мы допустимъ, что это расширеніе или сжатіе совершается настолько быстро, что ни одинъ элементъ жидкости не теряетъ и не получаетъ тепла, какъ это происходитъ, напримѣръ, при распространеніи звука, то превращеніе каждого элемента dm называется адиабатическимъ, и соотношеніе между плотностью и давленіемъ элемента имѣетъ видъ

$$p = k\varrho^\gamma,$$

гдѣ k и γ — постоянныя, изъ которыхъ вторая выражаетъ отношеніе теплоемкости газа при постоянномъ давленіи къ теплоемкости при постоянномъ объемѣ, $\gamma = 1,408$.

*** 370. Начальныя условія и условія на границахъ. Разрывы сплошности.** — При интегрированіи нужно принять въ расчетъ условія двухъ родовъ: начальныя условія, которыя имѣютъ мѣсто при $t = 0$, и условія на границахъ, которыя имѣютъ мѣсто на границахъ жидкости при всякомъ значеніи t .

1° Начальныя условія. — Для момента $t = 0$ даны область R_0 , занятая жидкостью въ пространствѣ, давленіе p_0 , а также плотность ρ_0 въ каждой точкѣ (a, b, c) жидкости и проекціи начальныхъ скоростей u_0, v_0, w_0 каждаго элемента. Слѣдовательно, количества $p_0, \rho_0, u_0, v_0, w_0$ при $t = 0$ суть данныя функціи координатъ a, b, c въ области R_0 .

2° Условія на границахъ. — Условіямъ второго рода жидкость подчинена во время своего движенія: это — условія на границахъ или на поверхности.

Въ простѣйшемъ случаѣ жидкость должна оставаться въ пространствѣ, ограниченномъ данными неподвижными поверхностями; это тотъ случай, когда газъ или жидкость должны оставаться въ неподвижномъ сосудѣ, совершенно ими заполняемомъ, или течь въ неподвижной трубкѣ, касаясь ея стѣнокъ. Въ подобныхъ случаяхъ нужно выразить, что въ любой моментъ t элементы жидкости, которые касаются данной неподвижной поверхности, имѣютъ скорость, касательную къ этой поверхности. Пусть $\psi(x, y, z) = 0$ будетъ уравненіе неподвижной поверхности; необходимо, чтобы при любомъ значеніи t всѣ элементы жидкости, для которыхъ $\psi(x, y, z) = 0$, удовлетворяли тождественно равенству

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Въ болѣе общемъ случаѣ жидкость должна оставаться въ соприкосновеніи съ матеріальной поверхностью

$$\psi(x, y, z, t) = 0, \quad (13)$$

форма которой и положеніе зависятъ отъ времени; примѣромъ такого случая можетъ служить жидкость, заключенная въ сосудѣ,

обладающемъ даннымъ движеніемъ. Здѣсь нужно выразить, что элементъ жидкости dm , имѣющій координаты x, y, z и находящійся въ моментъ t на поверхности (13), скользитъ по этой поверхности, т. е., что въ моментъ $t + dt$ онъ еще находится въ точкѣ $(x + dx, y + dy, z + dz)$ на поверхности; такимъ образомъ имѣемъ условіе

$$\psi(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0.$$

Развернувъ въ строку и принимая во вниманіе, что $\psi = 0$, мы получимъ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = 0;$$

но приращенія dx, dy, dz , будучи проекціями перемѣщенія элемента dm въ теченіе времени dt , потому равны соответственно $u dt, v dt, w dt$, и предыдущее условіе принимаетъ слѣдующій видъ:

$$u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

Когда мы имѣемъ дѣло съ капельной жидкостью, то можетъ существовать свободная поверхность; если эта свободная поверхность ограничить съ пустотой, то давленіе на свободную поверхность должно быть равно нулю; если же свободная поверхность соприкасается съ воздухомъ, который считается неподвижнымъ, то давленіе на эту поверхность есть величина постоянная и равно атмосферному давленію. Тогда уравненіе свободной поверхности будетъ $p - p_a = 0$, гдѣ p_a есть постоянная величина; кромѣ того, такъ какъ частицы, находящіяся на свободной поверхности, остаются на этой поверхности, то, въ силу уравненія (14),

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ жидкость бываетъ подчинена одновременно обоимъ родамъ условій на границахъ; напримѣръ, жидкость, текущая въ неподвижномъ каналѣ подъ открытымъ небомъ, должна оставаться въ соприкосновеніи съ неподвижными поверхностями и въ то же время имѣть постоянное давленіе на своей свободной поверхности.

Иногда эти различныя условія на границахъ могутъ быть удовлетворены лишь въ томъ случаѣ, если допустить въ жидкости существованіе извѣстныхъ разрывовъ сплошности.

II. — ПЕРЕМѢННЫЯ ЭЙЛЕРА. — РЕЖИМЪ.

✱ 371. Мгновенное состояніе скоростей жидкой массы. **Режимъ.** — Стремленіе представить въ каждый моментъ состояніе скоростей, которое въ гидродинамикѣ называютъ режимомъ жидкости, привело къ другому выбору независимыхъ переменныхъ.

Въ пространствѣ, гдѣ движется жидкость, рассмотримъ опредѣленную геометрическую точку P , имѣющую координаты x, y, z относительно трехъ неподвижныхъ осей. Въ моментъ t черезъ точку P проходитъ элементъ жидкости, обладающій опредѣленной скоростью, скажемъ, скоростью $W(u, v, w)$. Когда дано время t , скорость W вполне опредѣлена въ каждой точкѣ $P(x, y, z)$; ея проекціи u, v, w представляютъ собой, слѣдовательно, однозначныя функціи координатъ x, y, z . Обратно, если даны координаты x, y, z , т. е. когда мы фиксируемъ свое вниманіе на данной геометрической точкѣ P , то въ каждый моментъ t черезъ эту точку проходитъ новый элементъ жидкости, который обладаетъ скоростью W , мѣняющейся вмѣстѣ съ временемъ t ; поэтому проекціи u, v, w вектора W также суть функціи времени t . Въ конечномъ счетѣ u, v, w суть функціи четырехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z, t .

Если бы намъ были извѣстны проекціи u, v, w въ функціи четырехъ переменныхъ x, y, z, t , то мы знали бы въ каждый моментъ распределеніе скоростей въ различныхъ точкахъ движущейся сплошной массы, т. е. знали бы режимъ.

Далѣе, зная выраженія проекцій въ функціи отъ x, y, z, t , мы могли бы вполне опредѣлить движеніе каждой точки жидкости. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что намъ дано:

$$u = \varphi(x, y, z, t), \quad v = \varphi_1(x, y, z, t), \quad w = \varphi_2(x, y, z, t). \quad (1)$$

Разсмотримъ элементъ жидкости и прослѣдимъ его движеніе по его траекторіи; координаты x, y, z этого элемента становятся опредѣленными функціями времени

$$x = f(t), \quad y = f_1(t), \quad z = f_2(t),$$

производныя которыхъ по времени, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, равны соотвѣтственно проекціямъ u, v, w скорости разсматриваемаго элемента.

Но по предположенію эти проекціи, какъ функціи отъ времени, даны формулами (1), въ которыя вмѣсто координатъ x, y, z слѣдуетъ подставить функціи $f(t), f_1(t), f_2(t)$. Слѣдовательно, координаты x, y, z должны удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_1(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = \varphi_2(x, y, z, t);$$

интегрируя эти уравненія, мы найдемъ координаты x, y, z въ функціи отъ t и трехъ произвольныхъ постоянныхъ a, b, c , которыя будутъ координатами частицы въ моментъ t_0 .

★ **372. Определѣніе режима.** — Такимъ образомъ вопросъ сводится къ разысканію проекцій u, v, w въ функціи четырехъ независимыхъ переменныхъ x, y, z, t .

Какъ мы только-что видѣли,

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Поэтому проекціи ускоренія элемента x, y, z при его движеніи по траекторіи равны:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w.$$

Уравненія (п. 366) движенія жидкой массы теперь примутъ такой видъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

Эти уравненія содержатъ неизвѣстныя функціи u, v, w вмѣстѣ съ функціями ρ и p ; мы должны найти еще два уравненія, связывающія пять неизвѣстныхъ u, v, w, ρ, p и четыре независимыхъ

переменных x, y, z, t . Мы имѣемъ, во-первыхъ, характеристическое уравненіе жидкости

$$\mathfrak{F}(\varrho, p, \tau) = 0, \quad (3)$$

и затѣмъ еще дополнительное условіе, выражающее температуру τ въ функціи отъ ϱ и p . Последнее уравненіе будетъ дано уравненіемъ сплошности.

Уравненіе сплошности. — Мы получимъ это уравненіе въ системѣ переменныхъ Эйлера, какъ частное приложеніе уравненія сплошности п. 368, если выразимъ, что за бесконечно малый промежутокъ времени отъ момента t до момента $t_1 = t + dt$ масса dm элемента жидкости не измѣняется.

Разсмотримъ жидкую частицу, имѣющую объемъ $d\tau$, плотность ϱ и находящуюся въ точкѣ $P(x, y, z)$ въ моментъ t , который мы рассматриваемъ, какъ начальный; въ моментъ $t_1 = t + dt$ эта частица занимаетъ положеніе P_1 , которому соотвѣтствуютъ координаты

$$x_1 = x + u dt, \quad y_1 = y + v dt, \quad z_1 = z + w dt, \quad (4)$$

такъ какъ частица перемѣстилась изъ точки P въ P_1 въ направленіи вектора W на длину $PP_1 = Wdt$; въ положеніи P_1 объемъ частицы станетъ равнымъ $d\tau_1$, а ея плотность сдѣлается равной ϱ_1 ; такъ какъ масса частицы не измѣнилась, то

$$\varrho d\tau = \varrho_1 d\tau_1$$

Плотность ϱ вообще есть функція отъ x, y, z, t , $\varrho = \varphi(x, y, z, t)$; плотность ϱ_1 выражается такъ:

$$\varrho_1 = \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \varphi(x + u dt, y + v dt, z + w dt, t + dt);$$

откуда, разложивъ по строкѣ Тейлора и ограничиваясь первыми членами, имѣемъ:

$$\varrho_1 = \varrho + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} u + \frac{\partial \varrho}{\partial y} v + \frac{\partial \varrho}{\partial z} w + \frac{\partial \varrho}{\partial t} dt \right) dt; \quad (5)$$

это можно написать еще и такъ:

$$\varrho_1 = \varrho + \frac{d\varrho}{dt} dt,$$

при чемъ производную $\frac{d\varrho}{dt}$ берутъ, слѣдуя за частицей въ ея движеніи, т. е. рассматривая ϱ , какъ функцію координатъ x, y, z, t , а коор-

динаты x, y, z — какъ функціи времени t , производныя которыхъ равны u, v, w .

Чтобы вычислить отношеніе $\frac{d\tau_1}{dt}$, мы можемъ примѣнить сужденія п. 368, предполагая, что координаты x, y, z играютъ роль начальныхъ координатъ a, b, c , а x_1, y_1, z_1 — роль координатъ x, y, z . Положимъ теперь

$$D = \frac{\partial x_1}{\partial z} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial y_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial z_1}{\partial z} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} - \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial y} \right),$$

или, раскрывъ скобки,

$$D = \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial y_1}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial z} + \dots; \quad (6)$$

послѣдующихъ членовъ мы можемъ не писать. Теперь мы находимъ:

$$\frac{d\tau_1}{dt} = D, \quad \varrho_1 D - \varrho = 0. \quad (7)$$

Изъ формулъ (4), дающихъ x_1, y_1, z_1 въ функціи отъ x, y, z , получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x} &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt, & \frac{\partial x_1}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} dt, & \frac{\partial x_1}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} dt, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} dt, & \frac{\partial y_1}{\partial y} &= 1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt, & \frac{\partial y_1}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} dt, \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} dt, & \frac{\partial z_1}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial y} dt, & \frac{\partial z_1}{\partial z} &= 1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt. \end{aligned}$$

Подставивъ эти значенія въ выраженіе (6) для D , расположимъ его по степенямъ dt ; замѣчая, что всѣ ненаписанные члены содержатъ множителя dt^2 , имѣемъ:

$$D = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt, \quad (8)$$

при чемъ члены высшаго порядка мы отбрасываемъ согласно принципамъ анализа бесконечно малыхъ.

Уравненіе сплошности

$$\varrho_1 D - \varrho = 0$$

теперь напишется такъ:

$$\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dt} dt \right) \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt \right] - \varrho = 0;$$

раскрывъ скобки, сдѣлавъ приведеніе и отбросивъ члены, содержащіе dt^2 , получимъ:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (9)$$

Это—уравненіе сплошности; мы можемъ написать его въ другомъ видѣ, подставивъ вмѣсто производной $\frac{d\rho}{dt}$ ея выраженіе, встрѣчавшееся уже въ уравненіи (5); мы получимъ такимъ образомъ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (9')$$

Коэффициентъ кубическаго расширенія въ данной точкѣ въ моментъ t . — Разсматриваемая частица обладаетъ въ моментъ t объемомъ $d\tau$, и въ моментъ $t + dt$ объемомъ $d\tau_1$. Положительное или отрицательное расширеніе частицы за промежутокъ времени dt равно, слѣдовательно, $d\tau_1 - d\tau$; отношеніе этого расширенія къ начальному объему $d\tau$ есть коэффициентъ кубическаго расширенія частицы

$$\theta = \frac{d\tau_1 - d\tau}{d\tau}.$$

Согласно формулѣ (7),

$$\theta = \frac{d\tau_1}{d\tau} - 1 = D - 1$$

и, наконецъ, въ силу соотношенія (8):

$$\theta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dt.$$

373. Случай, когда плотность ρ есть функція давленія p , а силы и скорости произведены потенціаломъ. — Интегрированіе уравненій упрощается, когда удовлетворяются слѣдующія три условія:

1° плотность есть функція давленія;

2° силы X, Y, Z суть производныя отъ функцій $U(x, y, z, t)$;

3° скорости u, v, w суть производныя потенціала $\varphi(x, y, z, t)$:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Положимъ

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho};$$

уравненія (2) движенія примутъ форму

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \dots,$$

такъ какъ

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Послѣ замѣны проекцій u, v, w на $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ первое изъ этихъ уравненій напишется такъ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

или также

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q \right\} = 0$$

Этотъ результатъ показываетъ, что количество

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q$$

не зависитъ отъ x . Пользуясь двумя другими уравненіями движенія, мы убѣдимся такимъ же самымъ образомъ, что это количество не зависитъ ни отъ y , ни отъ z . Оно зависитъ, слѣдовательно, только отъ t , и мы имѣемъ

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q = \psi(t).$$

Но всякая функція φ_1 , отличающаяся отъ φ только функціей времени t , можетъ служить потенциаломъ скоростей, такъ какъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \dots$$

Если положить теперь

$$\varphi_1 = \varphi - \int_{t_0}^t \psi(t) dt,$$

гдѣ φ_1 есть потенциалъ скоростей, то предыдущее уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - Q = 0.$$

Итакъ, уравненія движениія могутъ быть приведены къ слѣдующимъ тремъ:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\varrho = f(p);$$

здѣсь второе уравненіе есть уравненіе сплошности, а третье — характеристическое уравненіе.

Мы имѣемъ такимъ образомъ три уравненія, посредствомъ которыхъ можно опредѣлить φ , p и ϱ въ функціи отъ x , y , z , t .

374. Установившееся движеніе. — Движеніе жидкости называется установившимся (permanent), если переменныя u , v , w , ϱ и p зависятъ только отъ x , y , z , но не отъ времени t . Движеніе можно считать установившимся, если условія, которымъ подчинена жидкость, не измѣняются со временемъ. Напримѣръ, установившееся движеніе мы можемъ наблюдать въ сосудѣ съ водой, который имѣетъ правильный притокъ воды и изъ котораго вода вытекаетъ постоянно одинаковымъ образомъ.

Слѣдуя за элементомъ жидкости вдоль его траекторіи (п. 371). мы имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (10)$$

Въ общемъ случаѣ u , v , w суть функціи отъ x , y , z и t . Уравненія (10) будутъ тремя дифференціальными уравненіями перваго порядка; они опредѣляютъ координаты x , y , z въ функціи времени t и трехъ произвольныхъ постоянныхъ:

$$x = f(a, b, c, t), \quad y = f_1(a, b, c, t), \quad z = f_2(a, b, c, t).$$

Исключивъ время t , мы получимъ уравненія траекторіи, по которой движется элементъ; въ этихъ уравненіяхъ содержатся три произвольныя постоянныя.

Въ случаѣ установившагося движенія проекціи u , v , w не содержатъ явно времени t ; уравненія (10) можно написать такъ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt.$$

Въ первыхъ двухъ уравненіяхъ содержатся лишь переменныя x , y , z ; рассматривая эти уравненія, какъ дифференціальныя относительно $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, и интегрируя, мы получимъ

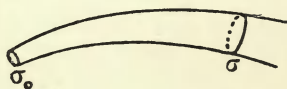
$$\Phi(x, y, z) = C,$$

$$\Phi_1(x, y, z) = C_1,$$

гдѣ C и C_1 произвольныя постоянныя. Мы получили уравненія траекторіи рассматриваемаго элемента. Они содержатъ лишь двѣ произвольныя постоянныя; отсюда слѣдуетъ, что черезъ каждую точку P пространства, въ которомъ движется жидкость, проходитъ одна траекторія, и притомъ только одна; всѣ элементы жидкости, проходящіе послѣдовательно черезъ точку P , слѣдуютъ по одной и той же траекторіи.

Жидкая нить. — Вообразимъ въ пространствѣ безконечно малый плоскій элементъ σ_0 ; различныя траекторіи, выходящія изъ контура этого элемента, образуютъ своего рода трубку, и жидкіе элементы, проходящіе сквозь элементарную площадку σ_0 , движутся въ этой трубкѣ. Эти элементы въ своей совокупности и составляютъ такъ называемую жидкую нить (фиг. 204).

* 375. Установившееся движеніе въ случаѣ, когда существуетъ силовая функція, независящая отъ времени, и когда плотность есть функція только отъ давленія. Теорема Бернулли. — Предположимъ, что силы X , Y , Z суть частныя производ-



Фиг. 204.

ныя функціи, не содержащей времени, и что плотность ρ есть функція только отъ давленія. Положивъ, какъ въ п. 373,

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho}$$

и замѣчая, что количества u , v , w и Q не зависятъ отъ времени t ,

мы можемъ написать уравненія движенія (2) такъ:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Въ эти уравненія не входитъ время. При ихъ преобразованіи естественно вводить лишь геометрическіе элементы. Назовемъ черезъ s дугу траекторіи, считая отъ опредѣленной точки P_0 до какой-нибудь точки P этой траекторіи. Координаты x, y, z точки P суть функции дуги s , и направляющіе косинусы касательной къ траекторіи въ точкѣ P равны

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Если скорость въ точкѣ P есть W , то ея проекціи равны

$$u = W \frac{dx}{ds}, \quad v = W \frac{dy}{ds}, \quad w = W \frac{dz}{ds}. \quad (12)$$

Первое изъ уравненій (11) даетъ намъ, слѣдовательно:

$$W \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

или

$$W \frac{du}{ds} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

такъ какъ вдоль траекторіи u есть функция отъ s черезъ посредство координатъ x, y, z . Такимъ же самымъ образомъ мы получимъ два другихъ уравненія (11):

$$W \frac{dv}{ds} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad W \frac{dw}{ds} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Умножимъ эти три уравненія соотвѣтственно на $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ и сложимъ ихъ; пользуясь формулами (12), мы получимъ

$$u \frac{du}{ds} + v \frac{dv}{ds} + w \frac{dw}{ds} - \frac{dQ}{ds} = 0, \quad (13)$$

потому что вдоль траекторіи Q зависитъ отъ s черезъ посредство

координатъ x, y, z , и производная $\frac{dQ}{ds}$ равна

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Такъ какъ мы имѣемъ еще соотношеніе

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

то уравненіе (13) можно написать такъ:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} W^2 - Q \right) = 0.$$

Послѣднее уравненіе выражаетъ, что количество, стоящее въ скобкахъ, не измѣняется съ измѣненіемъ дуги s ; это количество есть, слѣдовательно, постоянная величина $\mathfrak{E}$ вдоль разсматриваемой безконечно тонкой жидкой нити:

$$\frac{1}{2} W^2 - Q = \mathfrak{E}. \quad (14)$$

Это соотношеніе выражаетъ теорему Бернулли

Слѣдуетъ замѣтить, что количество $\mathfrak{E}$ остается постояннымъ вдоль каждой нити, но измѣняется въ зависимости отъ разсматриваемой нити; эта постоянная $\mathfrak{E}$ есть функція двухъ постоянныхъ C и C_1 , численныя значенія которыхъ опредѣляютъ траекторію жидкаго элемента или разсматриваемую жидкую нить (п. 374).

Разсмотримъ опредѣленную жидкую нить.

Обозначимъ черезъ W_0, p_0, U_0, Q_0 значенія функцій W, p, U, Q въ опредѣленной точкѣ σ_0 нити; выразивъ, что функція $\frac{1}{2} W^2 - Q$ имѣетъ постоянное значеніе по всей длинѣ нити, мы будемъ имѣть вдоль нити уравненіе

$$\frac{1}{2} (W^2 - W_0^2) = Q - Q_0;$$

или, подставивъ значеніе количества Q , получаемъ

$$\frac{1}{2} (W^2 - W_0^2) = U - U_0 - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \quad (15)$$

*** 376. Приложение къ несжимаемой жидкости.** — Приложимъ теорему Бернулли къ установившемуся движенію несжимае-

мой жидкости; въ этомъ случаѣ плотность ρ есть величина постоянная и

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho} = U - \frac{p}{\rho}.$$

Уравнение (15), выполняющееся вдоль жидкой нити, теперь напишется такъ:

$$\frac{1}{2} W^2 - U + \frac{p}{\rho} = \mathfrak{C}. \quad (16)$$

Если намъ извѣстны значенія U_0 , p_0 , W_0 функций U , p , W въ опредѣленной точкѣ нити, то по всей длинѣ этой нити

$$\frac{1}{2} W^2 - U + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} W_0^2 - U_0 + \frac{p_0}{\rho}. \quad (17)$$

Константа $\mathfrak{C}$, относящаяся къ этой нити, теперь опредѣлена.

Формула (16) даетъ скорость въ точкѣ нити, когда давленіе въ этой точкѣ извѣстно, или даетъ давленіе, когда извѣстна скорость. Рѣшивъ это уравненіе относительно p ,

$$p = \rho \left(U - \frac{1}{2} W^2 + \mathfrak{C} \right),$$

мы видимъ, что вдоль нити скорость W не можетъ превысить нѣкотораго предѣла: въ противномъ случаѣ произойдетъ разрывъ сплошности жидкой массы. Дѣйствительно, такъ какъ давленіе p должно быть либо положительнымъ, либо равнымъ нулю, то во всѣхъ точкахъ нити должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$W^2 \leq 2(U + \mathfrak{C}).$$

377. Теорема Торричелли. — Примѣнимъ предыдущіе результаты къ установившемуся движенію тяжелой жидкости, которая удерживается въ сосудѣ на постоянномъ уровнѣ (фиг. 205) благодаря притоку изъ питательнаго резервуара и вытекаетъ черезъ отверстіе въ стѣнкѣ. Наблюденіе показываетъ, что въ этомъ случаѣ движеніе жидкости обладаетъ установившимся режимомъ. Такъ какъ жидкіе элементы, лежащіе въ нѣкоторый моментъ на свободной поверхности, потомъ вытекаютъ черезъ отверстіе, то жидкія нити, начинаясь у поверхности, оканчиваются у отверстія.

Свободную поверхность мы примемъ за плоскость xu и направимъ ось z -овъ вертикально внизъ. Тогда силовая функція будетъ $U = gz$.

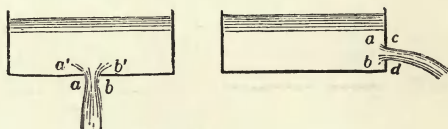
Уравненіе Бернулли (16) напишется такъ:

$$\frac{1}{2} W^2 - gz + \frac{p}{\varrho} = \mathfrak{C};$$

оно имѣть мѣсто по всей длинѣ жидкой нити. Чтобы опредѣлить константу $\mathfrak{C}$ вдоль нити, достаточно найти значенія W , z и p въ одной точкѣ нити. Но на свободной поверхности имѣемъ

$$z = 0, \quad p = p_a,$$

гдѣ p_a обозначаетъ атмосферное давленіе; скоростью же W_0 точекъ свободной поверхности можно пренебречь, если площадь



Фиг. 205.

свободной поверхности очень велика въ сравненіи съ размѣрами отверстія; мы положимъ въ этомъ случаѣ

$$W_0 = 0$$

на свободной поверхности. При такихъ условіяхъ

$$\mathfrak{C} = \frac{p_a}{\varrho};$$

слѣдовательно, вдоль нити

$$\frac{1}{2} W^2 = gz + \frac{1}{\varrho} (p_a - p). \quad (18)$$

Скорость истечения. — Пусть h будетъ разстояніе отверстія отъ свободной поверхности и W_e — скорость истечения черезъ отверстіе; чтобы опредѣлить эту скорость, достаточно найти значеніе давленія p у отверстія, изъ котораго жидкость вытекаетъ.

Такъ какъ истеченіе совершается въ воздухѣ, то давленіе у отверстія можно считать равнымъ атмосферному давленію p_a . Подставивъ $z = h$, $p = p_a$ въ формулу (18), мы находимъ:

$$W_e^2 = 2gh, \quad (19)$$

Эта послѣдняя формула выражаетъ теорему Торричелли: скорость истеченія равна скорости, которую получаетъ тяжелая точка, падая въ пустотѣ съ высоты h .

III. — ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВИХРЕЙ.

378. Векторъ-вихрь. — Въ движущейся жидкости вихремъ въ точкѣ $P(x, y, z)$ въ моментъ t называется векторъ Ω , который приложенъ къ точкѣ P и проекціями котораго на оси служатъ количества ξ, η, ζ , опредѣляемые формулами

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1)$$

въ которыхъ u, v, w обозначаютъ, какъ и выше, проекціи скорости жидкой частицы, лежащей въ точкѣ P .

Опредѣленный такимъ образомъ векторъ Ω имѣетъ значеніе, независящее отъ выбора осей. Это можно доказать при помощи слѣдующихъ элементарныхъ разсужденій, приведенныхъ Стоксомъ (Stokes).

Возьмемъ точку $P(x, y, z)$ въ моментъ t ; разсмотримъ часть матеріи, содержащуюся въ бесконечно малой сферѣ s , имѣющей центръ въ точкѣ P , и предположимъ, что въ моментъ t вся матерія, находящаяся внѣ этой сферы, будетъ уничтожена, а матерія внутри сферы сразу отвердѣетъ. Тогда начальное мгновенное вращеніе, получаемое этимъ твердымъ шаромъ, представить, какъ мы сейчасъ докажемъ, вихрь въ разсматриваемой точкѣ.

Дѣйствительно, предположимъ, что проекціи скорости матеріальной точки, лежащей въ точкѣ $P(x, y, z)$, до отвердѣванія равны u, v, w , а проекціи скорости бесконечно близкой точки P' , имѣющей координаты $x + x', y + y', z + z'$, равны u', v', w' , при чемъ бесконечно малыя количества x', y', z' суть координаты точки P' относительно осей Px', Py', Pz' , проведенныхъ черезъ точку P параллельно неподвижнымъ осямъ. Имѣемъ:

$$u' = u(x + x', y + y', z + z', t),$$

.....

или, разложивъ въ рядъ по строкъ Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z', \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z', \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Съ другой стороны, предположимъ, что проекціи скорости центра P твердаго шара непосредственно послѣ отвердѣванія равны u_1, v_1, w_1 , и составляющія мгновеннаго вращенія этого шара суть p, q, r ; проекціи u'_1, v'_1, w'_1 скорости точки этого шара, совпадающей съ точкой P' , равны

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= u_1 + qz' - ry', \\ v'_1 &= v_1 + rx' - pz', \\ w'_1 &= w_1 + py' - qx'. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Въ моментъ, когда происходитъ отвердѣваніе, внѣшняя среда исчезаетъ, вслѣдствіе чего между различными матеріальными точками, составляющими шаръ, имѣютъ мѣсто удары. Но всѣ эти удары будутъ внутренними по отношенію къ шару.

Но, если матеріальная система подвергается внутреннимъ соудареніямъ, то, какъ извѣстно, сумма проекцій количествъ движенія на ось будетъ одинаковой до и послѣ удара такъ же, какъ и сумма моментовъ количествъ движенія около оси. Примѣнимъ эти теоремы къ бесконечно малому шару s ; такъ какъ этотъ шаръ однороденъ и плотность его равна плотности въ точкѣ P , то имѣемъ, въ силу симметріи:

$$\left. \begin{aligned} \sum mx' &= \sum my' = \sum mz' = 0, \\ \sum my'z' &= \sum mz'x' = \sum mx'y' = 0, \\ \sum mx'^2 &= \sum my'^2 = \sum mz'^2 = Mk^2; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

здѣсь суммирование распространяется на всѣ составляющія шаръ матеріальныя точки P' массы m , и M обозначаетъ всю массу $\sum m$ этого шара.

Напишемъ сперва, что сумма проекцій количествъ движенія на ось x -овъ одинакова до и послѣ отвердѣванія; имѣемъ

$$\sum mi'_1 = \sum mi_1,$$

или

$$u_1 \Sigma m + q \Sigma m z' - \dots = u \Sigma m + \frac{\partial u}{\partial x} \Sigma m x' + \dots,$$

т. е., принимая во вниманіе равенства (4):

$$u_1 = u.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$v_1 = v, \quad w_1 = w.$$

Итакъ, скорость точки P , центра шара, не измѣняется.

Теперь напишемъ, что сумма моментовъ количествъ движенія около оси Px' остается безъ измѣненія; имѣемъ

$$\Sigma m (y' w'_1 - z' v'_1) = \Sigma m (y' w' - z' v'),$$

или, пользуясь выраженіями (2) и (3), найдемъ, что

$$\begin{aligned} w_1 \Sigma m y' - v_1 \Sigma m z' + p \Sigma m (y'^2 + z'^2) - \dots \\ = w \Sigma m y' - v \Sigma m z' + \frac{\partial w}{\partial y} \Sigma m y'^2 - \frac{\partial v}{\partial z} \Sigma m z'^2 + \dots; \end{aligned}$$

въ силу соотношеній (4), это уравненіе приводится къ виду

$$2k^2 p = k^2 \frac{\partial w}{\partial y} - k^2 \frac{\partial v}{\partial z},$$

откуда

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

точно такимъ же образомъ мы найдемъ:

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Итакъ, мгновенное вращеніе шара непосредственно послѣ отвердѣванія равно вихрю въ точкѣ P .

379. Вихревыя линіи. — Въ опредѣленный моментъ t вихри Ω составляютъ поле векторовъ, опредѣленное на всемъ протяженіи движущейся жидкости; вихревыми линіями въ моментъ t называются линіи векторовъ этого поля, т. е. линіи, обладающія тѣмъ свойствомъ, что касательная въ каждой точкѣ ихъ совпадаетъ съ вихремъ въ этой точкѣ.

Дифференціальными уравненіями вихревыхъ линій въ моментъ t будутъ, слѣдовательно, уравненія

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}, \quad (5)$$

гдѣ ξ , η , ζ суть количества (1), соотвѣтствующія опредѣленному моменту t . Интегрируя эти уравненія, мы получимъ уравненія вихревыхъ линій въ конечномъ видѣ

$$\Psi(x, y, z, t) = C_1,$$

$$\Psi_1(x, y, z, t) = C_2$$

съ двумя произвольными постоянными C_1 и C_2 . Эти уравненія содержатъ букву t , которая входитъ въ дифференціальныя уравненія (5), но разсматривается, какъ константа; когда мы будемъ давать t различные значенія, вихревыя линіи будутъ измѣняться.

Въ случаѣ установившагося движенія проекціи скорости u , v , w и, слѣдовательно, количества ξ , η , ζ не зависятъ отъ времени; въ этомъ случаѣ вихревыя линіи не измѣняются съ измѣненіемъ времени t .

Въ видѣ исключенія можетъ случиться, что вихревыя линіи будутъ замкнутыми, но такіе случаи имѣютъ весьма частный характеръ. Вообще же расположеніе этихъ линій, какъ и всѣхъ тѣхъ линій, которыя опредѣляются дифференціальными уравненіями вида (5), гораздо болѣе сложно. Если вихревая линія, исходящая изъ точки A , не задерживается стѣнкой, то она, вообще, безгранично продолжается въ жидкости, безконечное число разъ проходя около точки A , и притомъ сколь угодно близко отъ нея, но ни разу не проходя именно черезъ нее.

380. Другой видъ уравненій движенія. — Введя вихрь, мы можемъ написать уравненія движенія слѣдующимъ образомъ. Дифференцируя тождество

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

по x , мы получимъ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x},$$

и, слѣдовательно,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) = v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

отсюда, пользуясь обозначеніями (1), выводимъ:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) + 2(\eta w - \zeta v).$$

Преобразуя точно такъ же аналогичныя количества, входящія въ уравненія (2) п. 372, мы можемъ написать ихъ такъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) - 2 (\eta w - \zeta v) - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) - 2 (\xi u - \xi w) - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) - 2 (\xi v - \eta u) - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

381. Случай, когда плотность ρ есть функція давленія p и силы имѣютъ потенціалъ. Уравненія Гельмгольца. — Въ приложеніяхъ часто встрѣчается случай, когда плотность ρ зависитъ лишь отъ давленія p . Въ частности, это имѣетъ мѣсто, если рассматриваемая жидкая масса имѣетъ постоянную температуру, такъ какъ въ этомъ случаѣ характеристическое уравненіе даетъ:

$$\rho = f(p).$$

Разсмотримъ этотъ случай. Положивъ

$$P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (7)$$

имѣемъ:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Предположимъ, кромѣ того, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

гдѣ U есть функція отъ x, y, z, t .

Первое изъ уравненій (6) теперь переписется такъ:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} W^2 \right) - 2 (\eta w - \zeta v) - \frac{\partial u}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 (\eta w - \zeta v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{1}{2} W^2 - P \right).$$

Положивъ

$$H = U - \frac{1}{2} W^2 - P \quad (8)$$

и преобразовавъ аналогичнымъ образомъ два другихъ уравненія (6),

мы приведемъ уравненія (6) къ виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \xi v) &= \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\xi u - \xi w) &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(\xi v - \eta u) &= \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

382. Уравненія теоріи вихрей. — Теорія вихрей примѣняется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда удовлетворяются условія предыдущаго пункта. Мы получимъ, по Гельмгольцу (Helmholz), основныя уравненія, исключивъ изъ уравненій (9) функцію H . Напишемъ, на примѣръ, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0.$$

Дифференцированіе даетъ:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial y} (\xi v - \eta u) - 2 \frac{\partial}{\partial z} (\xi u - \xi w) = 0.$$

Припомнимъ значеніе количества ξ , мы видимъ, что совокупность первыхъ двухъ членовъ равна $2 \frac{\partial \xi}{\partial t}$; раскрывъ скобки, мы, слѣдовательно, получимъ:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \xi \frac{\partial u}{\partial z} - u \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = 0. \quad (10)$$

Теперь воспользуемся тождествомъ

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

и уравненіемъ сплошности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

[уравненіе (9) п. 372]. Послѣ подстановокъ

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

уравненіе (10) приметъ видъ:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\xi}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \xi \frac{\partial u}{\partial z};$$

Первые четыре члена составляют производную количества ξ по времени; ее берутъ, слѣдуя за элементомъ жидкости въ его движеніи, т. е. эта производная равна $\frac{d\xi}{dt}$; имѣемъ, слѣдовательно,

$$\frac{d\xi}{dt} - \frac{\xi}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z},$$

или также

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\xi}{\varrho} \right) = \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (11)$$

Аналогичное вычисленіе дастъ намъ два другихъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{\varrho} \right) &= \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta}{\varrho} \right) &= \frac{\xi}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

Полученныя уравненія носятъ названіе уравненій Гельмгольца.

Изложеніе теоріи вихрей читатель можетъ найти въ III т. курса Аппелля. Здѣсь же мы ограничимся лишь доказательствомъ одной теоремы Лагранжа.

383. Теорема Лагранжа. — Если существуетъ функція $\varphi(x, y, z, t)$, которая въ моментъ t удовлетворяетъ тождественно равенствамъ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то говорятъ, что въ моментъ t существуетъ потенциалъ скоростей.

Если въ моментъ t существуетъ потенциалъ скоростей, то

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0, \quad \dots$$

и вихри въ моментъ t равны нулю. Обратно, если въ моментъ t вихри равны нулю, то существуетъ потенциалъ скоростей.

Лагранжъ далъ слѣдующую теорему:

Когда существуетъ силовая функція, и плотность есть функція лишь отъ давленія, то въ любой моментъ t будетъ существовать потенциалъ скоростей, коь скоро потенциалъ скоростей существуетъ въ моментъ t_0 .

Эта теорема вытекает непосредственно изъ уравненій Гельмгольца. Если мы прослѣдимъ частицу въ ея движеніи, то координаты x, y, z этой частицы, а также количества $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ и p будутъ функціями времени. Мы можемъ поэтому разсматривать уравненія (11) и (11'), какъ систему трехъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ отношенія $\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}, \frac{\zeta}{\varrho}$ въ функціи времени, ибо коэффициенты $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots$ этихъ уравненій суть функціи времени. Интегрированіе этихъ уравненій дастъ намъ для отношеній $\frac{\xi}{\varrho}, \frac{\eta}{\varrho}, \frac{\zeta}{\varrho}$ функціи времени t , линейныя и однородныя относительно трехъ произвольныхъ постоянныхъ, которыя представляютъ собой, на примѣръ, значенія $\frac{\xi_0}{\varrho_0}, \frac{\eta_0}{\varrho_0}, \frac{\zeta_0}{\varrho_0}$ трехъ функцій въ начальный моментъ t_0 . Мы получимъ, слѣдовательно, выраженія вида

$$\frac{\xi}{\varrho} = \frac{\xi_0}{\varrho_0} f_1(t) + \frac{\eta_0}{\varrho_0} f_2(t) + \frac{\zeta_0}{\varrho_0} f_3(t),$$

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{\xi_0}{\varrho_0} \varphi_1(t) + \frac{\eta_0}{\varrho_0} \varphi_2(t) + \frac{\zeta_0}{\varrho_0} \varphi_3(t),$$

$$\frac{\zeta}{\varrho} = \frac{\xi_0}{\varrho_0} \psi_1(t) + \frac{\eta_0}{\varrho_0} \psi_2(t) + \frac{\zeta_0}{\varrho_0} \psi_3(t).$$

Поэтому, если значенія ξ_0, η_0, ζ_0 равны нулю, то и значенія ξ, η, ζ равны нулю въ любой моментъ t ; теорема наша, такимъ образомъ, доказана.

Упражнения къ различнымъ отдѣламъ курса¹⁾).

I. — КИНЕМАТИКА.

1. Когда подвижная плоскость скользитъ по неподвижной, то непрерывное движеніе подвижной плоскости можно получить, катя кривую, связанную съ подвижной плоскостью, такъ называемую подвижную центроиду, или рулету по неподвижной кривой (неподвижной центроидѣ).

Доказать, что въ каждый моментъ существуетъ точка A (центръ ускореній), ускореніе которой равно нулю, и что точки подвижной плоскости имѣютъ въ рассматриваемый моментъ такіа ускоренія, какъ-будто плоскость вращается съ дѣйствительной угловой скоростью ω вокругъ точки A , которая предполагается неподвижной.

Отвѣтъ. — Формулы п. 52 непосредственно даютъ проекціи на оси ускоренія J точки подвижной плоскости. Дифференцируя формулы, которыя даютъ проекціи скорости, и обозначая черезъ ω' производную по t угловой скорости ω , имѣемъ:

$$J_{x_1} = \frac{d^2 x_0}{dt^2} - (x \cos \theta - y \sin \theta) \omega^2 - (x \sin \theta + y \cos \theta) \omega',$$

$$J_{y_1} = \frac{d^2 y_0}{dt^2} - (x \sin \theta + y \cos \theta) \omega^2 + (x \cos \theta - y \sin \theta) \omega';$$

проектируя на подвижныя оси и обозначая черезъ J_0 ускореніе точки O , получимъ:

$$J_x = J_x^0 - \omega^2 x - \omega' y,$$

$$J_y = J_y^0 - \omega^2 y + \omega' x.$$

Точка A , координаты которой a и b относительно подвижныхъ осей опредѣляются уравненіями

$$(A) \quad J_x^0 - \omega^2 a - \omega' b = 0, \quad J_y^0 - \omega^2 b + \omega' a = 0,$$

¹⁾ Большинство нижеслѣдующихъ упражненій было предложено въ качествѣ темъ на испытаніяхъ по теоретической механикѣ.

имѣть ускореніе нуль; это и есть центръ ускореній. Вычитывая выраженія (A) изъ предыдущихъ формулъ, мы находимъ:

$$J_x = -\omega^2 (x - a) - \omega' (y - b),$$

$$J_y = -\omega^2 (y - b) + \omega' (x - a).$$

Эти формулы показываютъ, что точка (x, y) имѣетъ такое же ускореніе, какое она имѣла бы, если бы точка $A(a, b)$ была неподвижна и плоскость вращалась бы вокругъ нея съ угловой скоростью ω .

2. Доказать, что точки M подвижной фигуры, находящіяся въ данный моментъ t на точкѣ перегиба своей траекторіи, лежатъ на одной окружности (окружность перегибовъ).

Отвѣтъ. — Если точка M лежитъ въ точкѣ перегиба своей траекторіи, то нормальная составляющая $\frac{V^2}{\rho}$ ея ускоренія равна нулю, такъ какъ $\rho = \infty$; ускореніе J точки M будетъ, слѣдовательно, имѣть такое же направленіе, какъ и ея скорость V ; обратное предположеніе тоже имѣетъ мѣсто. Поэтому, для того, чтобы точка M лежала въ точкѣ перегиба своей траекторіи, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{J_x}{V_x} = \frac{J_y}{V_y}, \quad J_x V_y - J_y V_x = 0,$$

или, обозначая, какъ въ п. 52, черезъ x' и y' координаты мгновеннаго центра I , имѣемъ:

$$\begin{aligned} &\omega^2 [(x - a)(x - x') + (y - b)(y - y')] \\ &+ \omega' [(y - b)(x - x') - (x - a)(y - y')] = 0. \end{aligned}$$

Мы получили уравненіе окружности, проходящей черезъ точки I и A ; это и есть окружность перегибовъ. Если $\omega = \text{const.}$, $\omega' = 0$, то эта окружность построена на прямой IA , какъ на діаметрѣ; въ этомъ случаѣ IA есть общая нормаль въ точкѣ I къ неподвижной и подвижной центроидамъ.

3. Непрерывное геометрическое перемѣщеніе плоскости на плоскости. — Предположимъ (п. 52), что координаты x_0, y_0 подвижнаго начала O даны въ функціи угла θ . Съ измѣненіемъ угла θ плоскость, которая переносится вмѣстѣ съ подвижными осями, получаетъ нѣкоторое геометрическое перемѣщеніе. Траекторіи различныхъ точекъ, неподвижная центроида и подвижная опредѣлены; чтобы получить ихъ, нѣтъ надобности знать, какъ уголъ θ мѣняется съ измѣненіемъ времени t . Но положеніе центра ускореній при опредѣленномъ значеніи угла θ зависитъ отъ соотношенія между θ и t :

$$\theta = f(t).$$

Доказать, что различные центры ускореній, соответствующіе одному и тому же положенію подвижныхъ осей, когда измѣняется выраженіе угла θ въ функціи отъ времени t , лежатъ на одной окружности (окружности перегибовъ).

Иногда центръ ускореній, соотвѣтствующій зависимости $\theta = t$, называется геометрическимъ центромъ ускореній.

4. Плоскость движется въ плоскости; прямая подвижной плоскости проходитъ черезъ неподвижную точку O и неподвижной центроидой служитъ окружность, проходящая черезъ точку O . Найти подвижную центроиду и построить для любого момента окружность перегибовъ.

5. Въ неподвижной плоскости P дана окружность C и одинъ изъ ея діаметровъ D ; плоскость Π скользитъ по плоскости P такимъ образомъ, что нѣкоторая прямая Δ плоскости Π остается касательной къ окружности C , и точка A прямой Δ скользитъ по діаметру D съ постоянной скоростью. Найти геометрическія мѣста мгновеннаго центра въ плоскостяхъ Π и P . Найти геометрическія мѣста точекъ, которыя въ данный моментъ имѣютъ центростремительное или тангенціальное ускореніе, равное нулю.

6. Доказать слѣдующее построеніе мгновенной оси вращенія и скольженія, указанное Понселе.

Черезъ произвольную точку пространства проведемъ три вектора геометрически равные скоростямъ OV , OV' , OV'' трехъ взятыхъ въ тѣхъ точкахъ M , M' , M'' . Мгновенная ось перпендикулярна къ плоскости Π трехъ точекъ V , V' , V'' . Пусть m , m' , mv , $m'v'$ будутъ проекціи точекъ M , M' и ихъ скоростей на плоскость Π ; перпендикуляры, возставленные въ точкахъ m и m' къ проекціямъ mv и $m'v'$ пересѣкаются въ основаніи оси на плоскости Π .

7. Даны двѣ прямоугольныя оси OX и OY и цѣпная линія

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

треугольникъ ABC , въ которомъ уголъ A есть прямой и сторона $AB = a$, скользитъ въ плоскости OXY такимъ образомъ, что катетъ AC все время касается цѣпной линіи, а вершина B пробѣгаетъ ось OX съ постоянной скоростью $a\lambda$. Найти для данного положенія треугольника ABC мгновенный центръ, окружность перегибовъ и геометрическое мѣсто точекъ, тангенціальное ускореніе которыхъ равно нулю. Определить ускореніе точки A въ функціи угла α , образуемаго катетомъ AC съ осью OX .

8. Точка плоской фигуры, имѣющей неизмѣнную форму, совершаетъ равномерное ускоренное движеніе по неподвижной прямой въ плоскости, и одновременно съ тѣмъ фигура равномерно вращается вокругъ этой точки.

1° Найти центроиды (рулеты).

2° Для какого-нибудь положенія фигуры построить окружность перегибовъ и точку, ускореніе которой равно нулю; найти геометрическое мѣсто этой точки при перемѣщеніи фигуры.

9. Доказать, что въ общемъ случаѣ движенія свободного твердаго тѣла геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ центростремительное уско-

рение равно нулю, или траектории которых имѣютъ въ этихъ точкахъ перегибъ, есть кривая третьяго порядка двойкой кривизны.

10. Обозначимъ черезъ

S — движущееся твердое тѣло,

A — точку тѣла S ,

D — прямую, проходящую черезъ точку A и неизмѣнно связанную съ тѣломъ S ,

Δ — неподвижную прямую въ пространствѣ,

Ω — мгновенную винтовую ось въ движеніи тѣла S .

Допустимъ, что прямая D постоянно остается перпендикулярной къ прямой Δ и что точка A движется по прямой Δ .

Доказать, что общій перпендикуляръ къ прямой D и оси Ω лежитъ въ плоскости, проведенной черезъ точку A перпендикулярно къ прямой D .

Допустимъ далѣе, 1° что движеніе точки A по прямой Δ равномернo и 2° что геометрическое мѣсто оси Ω въ тѣлѣ S есть гиперболоидъ вращения U вокругъ оси D .

Найти: 1° движеніе тѣла S и 2° геометрическое мѣсто оси Ω въ пространствѣ.

11. Плоскость Π движется относительно неподвижной плоскости P , съ которой она совпадаетъ, такимъ образомъ, что двѣ опредѣленныя точки A и B плоскости Π описываютъ въ плоскости P двѣ равныя окружности, которыя находятся одна внѣ другой; разстояніе между ихъ центрами равно длинѣ AB . Кромѣ того предполагается, что движеніе не приводится къ непрерывному поступательному движенію.

Найти кривыя, которыя катятся одна по другой безъ скольженія, и указать въ общихъ чертахъ, каковы траектории различныхъ точекъ плоскости Π .

Существуетъ ли здѣсь въ нѣкоторые моменты касательное поступательное движеніе? (Безконечно удаленный мгновенный центръ).

12. Конечъ A прямолинейнаго стержня AB равномернo движется по окружности, тогда какъ конечъ B движется по продолженію діаметра Ox этой окружности. Изучить распредѣленіе ускореній различныхъ точекъ стержня AB въ данный моментъ.

13. Въ плоскости P , которая движется на неподвижной плоскости Q , начерченъ равнобедренный треугольникъ ABC , имѣющій прямой уголъ A . Движеніе плоскости P въ каждый моментъ есть результатъ сложения трехъ вращеній $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, которыя совершаются соотвѣтственно вокругъ точекъ A, B, C ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$ суть данныя функции времени). Опредѣлить въ каждый моментъ мгновенный центръ и найти двѣ кривыя, каченіемъ которыхъ можетъ быть опредѣлено движеніе плоскости P .

Прямая AB и AC принимаются за подвижныя оси x -овъ и y -овъ; далѣе допускаютъ, что въ началѣ времени подвижныя оси совпадаютъ съ

неподвижными, и оканчиваютъ вычисленіе въ предположеніи, что

$$\omega_1 = 1 + 2 \operatorname{tang} t - \operatorname{tang}^2 t,$$

$$\omega_2 = -2 \operatorname{tang} t,$$

$$\omega_3 = \operatorname{tang}^2 t.$$

Показать, что въ этомъ случаѣ точка C описываетъ цѣпную линію.

14. Плоская фигура движется въ своей плоскости P . Найти геометрическое мѣсто точекъ плоскости P , совпадающихъ съ такими точками подвижной фигуры, скорость которыхъ въ данный моментъ: 1° находится въ постоянномъ отношеніи либо къ полному ускоренію, либо къ тангенціальному, либо къ нормальному; 2° составляетъ постоянный уголъ съ ускореніемъ.

15. Ортогональный трехгранный уголъ (T), или ($Oxyz$), движется относительно аналогичнаго трехграннаго угла (T_1), или ($O_1x_1y_1z_1$). Даны проекціи $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ на подвижныя оси мгновеннаго поступательнаго движенія и мгновеннаго вращенія; требуется найти для момента t :

1° координаты центра кривизны траекторіи точки $M(x, y, z)$;

2° геометрическія мѣста точекъ (x, y, z), нормальныя (или тангенціальныя) ускоренія которыхъ равны нулю.

16. Дана винтовая линія H , проведенная на цилиндрѣ вращенія; точка M движется по кривой H такимъ образомъ, что дуга s кривой H , отсчитываемая отъ нѣкоторой неподвижной точки M_0 до точки M , равна времени t , которое отсчитывается отъ нѣкотораго начальнаго момента, $s = t$; MX есть касательная къ винтовой линіи H въ точкѣ M , направленная въ сторону возрастающихъ дугъ; MY есть главная нормаль, направленная къ центру кривизны, MZ — бинормаль; черезъ C обозначимъ твердое тѣло, неизмѣнно связанное съ ортогональнымъ трехграннымъ угломъ MYZ .

1° Найти мгновенную винтовую ось I . Въ какомъ положеніи находится ось I относительно зрителя, участвующаго въ движеніи? Къ чему приводится движеніе для такого зрителя?

2° Найти геометрическое мѣсто Γ точекъ тѣла C , скорости которыхъ проходятъ черезъ точку M .

3° Точка P движется въ пространствѣ такимъ образомъ, что ея абсолютная скорость геометрически равна вектору ω , представляющему мгновенное вращеніе тѣла C въ тотъ же моментъ. Дано начальное положеніе P_0 точки P . Какую кривую γ описываетъ точка P въ тѣлѣ C ?

4° Въ тѣлѣ C существуютъ точки, переносное ускореніе которыхъ равно нулю. Во что обратится кривая γ , когда P_0 будетъ такой точкой? Найти геометрическое мѣсто точекъ тѣла C , ускоренія которыхъ имѣютъ опредѣленную величину.

5° Вопросы 1° и 2° распространить на случай, когда винтовая линія H проведена на произвольномъ цилиндрѣ.

17. Въ неподвижной плоскости проведены прямоугольные оси Ox, Oy ; плоскость прямого угла $X\Omega Y$ движется въ этой неподвижной плоскости. Вершина Ω , имѣющая координаты (a, b) относительно осей Ox, Oy , описываетъ параболу $b^2 = 2pa$; уголъ α , образуемый прямой ΩX съ осью Ox , измѣняется въ функции отъ положенія вершины Ω отношеніемъ $-\frac{b}{p}$, а въ функции времени t — выраженіемъ $m \log(1+t)$ (p и m — постоянныя величины). Определить аналитически: неподвижную центроиду, подвижную центроиду, геометрическое мѣсто геометрическаго центра ускореній и геометрическое мѣсто центра ускореній въ собственномъ смыслѣ слова.

18. Данъ кубъ $ABCD, A_1B_1C_1D_1$; скорость точки A въ разсматриваемый моментъ представлена векторомъ AB ; скорость точки C_1 направлена по ребру C_1C , скорость точки D_1 лежитъ въ плоскости A_1BCD_1 .

Найти мгновенную винтовую ось, скорость скольженія и мгновенное вращеніе.

19. Ортогональный трехгранный уголъ $T(Oxz)$ движется въ ортогональномъ трехгранномъ углу T_1 такимъ образомъ, что начало O перемѣщается въ плоскости x_1Oy_1 и двѣ неизмѣнныя точки оси Oz перемѣщаются соответственно въ плоскостяхъ $y_1O_1z_1, z_1O_1x_1$.

1° Вычислить самыя общія выраженія мгновенныхъ элементовъ движенія угла T (поступательнаго движенія и вращенія).

2° Показать, что ось Oz остается все время нормальной къ нѣкоторой поверхности.

3° Определить, какія нужно прибавить условія для того, чтобы траекторіей данной постоянной точки на оси Oz служила окружность.

20. Твердое тѣло отнесено къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, и для разсматриваемаго момента извѣстны скорости трехъ точекъ тѣла:

скорость точки $(0, 0, 0)$ имѣетъ составляющія 2, 1, — 3

" " $(1, 1, 0)$ " " 0, 3, — 1

" " $(1, 1, 1)$ " " — 1, 2, — 1.

Найти для разсматриваемаго момента элементы винтового движенія, т. е. мгновенную ось вращенія и скольженія, величину вращенія и величину скольженія.

II. — СТАТИКА.

1. Тяжелая и однородная нить, имѣющая 8 м. въ длину, прикрѣплена своими концами къ двумъ неподвижнымъ точкамъ A и B , которыя лежатъ на одной горизонтальной прямой, и разстояніе между которыми равно 4 м.

Вычислить съ точностью до 1 мм. стрѣлку цѣпной линіи, образуемой нитью, и найти съ точностью до 1 г. натяженія въ точкахъ A и B , зная, что одинъ метръ нити вѣситъ 1 кг.

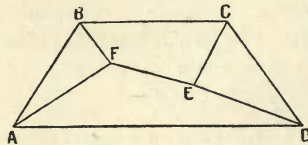
2. Вычислить съ точностью до 0,001 параметръ цѣпной линіи, образуемой нитью, которая имѣетъ длину 17, если одинъ конецъ ея находится въ началѣ координатъ, а другой въ точкѣ $x=14$, $y=8$. (Ось Oy направлена противоположно тяжести).

3. Безконечно тонкая однородная пластинка имѣетъ форму параболическаго сегмента. Этотъ сегментъ ограниченъ прямой BB' , которая перпендикулярна къ оси параболы и удалена отъ вершины A на разстояніе, равное $16 AF$; F есть фокусъ. Пластинка вѣситъ 25 кг. Она находится въ вертикальномъ положеніи на горизонтальной плоскости, и ея ось образуетъ съ горизонтомъ уголъ въ 45° . Какой вѣсъ нужно приложить къ фокусу, чтобы пластинка сохраняла равновѣсіе?

4. Даны три прямоугольныя оси OX , OY , OZ и гибкая невѣсомая нить, имѣющая въ длину $12a$; одинъ конецъ ея прикрѣпленъ къ началу, а другой — къ точкѣ $x=0$, $y=2a$, $z=4a$. На эту нить нанизаны три безконечно малыхъ кольца, которыя могутъ скользить безъ тренія; на первое, начиная отъ начала координатъ, дѣйствуетъ сила $2P$, параллельная оси OX , на второе — сила $4P$, параллельная оси OY , и на послѣднее — сила $4P$, параллельная оси OZ . Определить фигуру равновѣсія и натяженіе нити.

5. Найти фигуру равновѣсія нити, лежащей въ плоскости, если каждый элементъ ея ds отталкивается отъ лежащей въ плоскости прямой OX силой, перпендикулярной оси OX и равной отношенію элемента ds къ квадрату его разстоянія отъ прямой.

6. Дана сочлененная система $ABCDEF$, стержни которой имѣютъ длины, опредѣленные слѣдующимъ образомъ:



Фиг. 206.

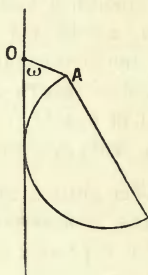
Стержни AB , BC , CD представляютъ собой три послѣдовательныя стороны правильнаго шестиугольника, стороны котораго имѣютъ 1 м. въ длину. Стержень AD есть діаметръ окружности, описанной около этого шестиугольника (фиг. 206). Точка E есть середина радіуса, проведеннаго къ вершинѣ C , и точка F лежитъ на радіусѣ, проведенномъ въ вершину B , на разстояніи одной трети радіуса отъ этой точки. Система помѣщена въ вертикальной плоскости и подперта въ двухъ точкахъ A и D , расположенныхъ на одной горизонтальной прямой. Къ точкѣ E приложенъ вѣсъ въ 1000 кг.; найти натяженія стержней. Задачу можно рѣшить либо графическимъ способомъ, либо вычисленіемъ.

7. Концы нити укрѣплены въ двухъ точкахъ A и B , лежащихъ на одной горизонтальной прямой. На этой нити отмѣчаютъ точки C, D, E, F , которыя дѣлятъ ее на пять равныхъ частей; разстояніе AB равно диаметру окружности, описанной около десятиугольника, сторона котораго есть AC .

Къ точкамъ C и F приложенъ одинаковый вѣсъ, равный 10 кг. , а къ точкамъ D и E — два равныхъ между собой вѣса Q . Чему долженъ быть равенъ этотъ вѣсъ Q для того, чтобы нить получила форму правильного полудесятиугольника?

Предполагая, что разстояніе AB равно 2 м. , вычислить, насколько понизится сторона DE , если каждый изъ этихъ двухъ вѣсовъ Q увеличить на одну тысячную часть найденной для нихъ величины.

8. Тяжелый однородный полукругъ радіуса R , находящийся въ вертикальной плоскости, подвѣшенъ за конецъ A діаметра, ограничивающаго



Фиг. 207.

полукругъ, въ точкѣ O этой вертикальной плоскости посредствомъ нерастяжимой и невѣсомой нити, имѣющей длину l (фиг. 207). Полукругъ опирается на совершенно гладкій вертикальный стержень, проходящій черезъ точку O . Требуется составить уравненіе, определяющее уголъ ω , образуемый нитью съ стержнемъ въ положеніи равновѣсія. Зная этотъ уголъ, вычислить натяженіе нити и реакцію стержня.

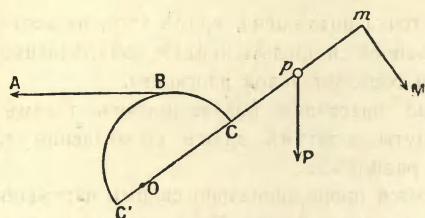
9. Гибкая и нерастяжимая нить въ состояніи равновѣсія получаетъ видъ дуги кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, ограниченной окружностью, концентричной съ кривой и имѣющей радіусъ $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Сила, дѣйствующая на нить, исходить отъ центра. Найти законъ этой силы въ функціи разстоянія r .

Найти также выраженіе натяженія въ каждой точкѣ нити либо въ функціи разстоянія r , либо же въ функціи дуги s , отсчитываемой отъ вершины.

Какія силы нужно приложить къ концамъ, чтобы удержать эти точки и установить дѣйствительное равновѣсіе?

10. При помощи длинной металлической нити CBA желаютъ передать удаленному предмету A постоянную горизонтальную силу T . Съ этой

цѣлью одинъ конецъ C (фиг. 208) этой нити укрѣпляютъ на контурѣ CBC' , отъ котораго она затѣмъ отстаѣтъ въ точкѣ B въ тангенціальномъ направленіи и доходитъ до предмета A . Вертикальная пластинка CBC' — полая, такъ что ея вѣсомъ можно пренебречь. Она прикрѣплена къ рычагу который движется въ вертикальной плоскости вокругъ точки O ; въ точкѣ P рычага приложенъ противовѣсъ P , а на рукоятку въ точкѣ m перпендикулярно къ прямой Om дѣйствуетъ сила M , развиваемая рукой. Даны си-



Фиг. 208.

лы T , P , M и разстоянія $Op = p$, $Om = m$. Какую форму нужно придать неизвѣстному профилю пластинки для того, чтобы сила M была постоянной при всякомъ положеніи системы?

(Предполагается, что точка A удалена настолько, что нить BA остается горизонтальной).

11. Найти уравненіе равновѣсія невѣсомой нити, каждый элементъ которой ds отталкивается отъ оси OX силой, равной отношенію элемента ds къ квадрату его разстоянія отъ оси OX .

Опредѣлить, въ какомъ случаѣ натяженіе остается постояннымъ и какова тогда будетъ кривая нити. Наконецъ, предполагая, что нить содержится въ плоскости XOY , опредѣлить образуемую ею кривую въ частномъ случаѣ, когда послѣдняя опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ.

12. Въ двухъ неподвижныхъ точкахъ A и B , лежащихъ на одной горизонтальной прямой на разстояніи 4 м. одна отъ другой, подвѣшиваютъ тяжелую и однородную нить длиною въ 8 м., каждый метръ которой вѣситъ 1 кг.; эта нить принимаетъ форму цѣпной линіи.

Нить разрѣзаютъ въ двухъ точкахъ C и D , лежащихъ на одной горизонтальной прямой на разстояніи 2 м. между собой, и къ точкамъ C и D прикрѣпляютъ тяжелый и однородный стержень.

Каковъ долженъ быть вѣсъ этого стержня для того, чтобы точки C и D сохранили то же самое положеніе, которое онѣ занимали раньше?

13. Тяжелый стержень AB опирается тангенциально на кривую, лежащую въ вертикальной плоскости, и своимъ концомъ A упирается въ вертикальную плоскость, перпендикулярную первой.

Опредѣлить кривую такимъ образомъ, чтобы стержень оставался въ равновѣсіи, какова бы ни была его точка касанія.

Тренія нѣтъ.

14. Плоская и недеформирующаяся квадратная пластинка подвѣшена къ четыремъ вершинамъ квадрата, лежащаго въ горизонтальной плоскости, посредствомъ четырехъ вертикальныхъ, тождественныхъ, эластическихъ нитей, имѣющихъ въ своемъ естественномъ состояніи одну и ту же длину.

Тяжелая точка, имѣющая такой же вѣсъ P , какъ и пластинка, покоится на этой пластинкѣ и помѣщена на прямой, соединяющей центръ квадрата съ одной изъ вершинъ, на разстояніи четверти этого отрезка, считая отъ центра.

Эта тяжелая точка подвѣшена, кромѣ того, на вертикальной эластической нити, тождественной съ предыдущими и прикрѣпленной къ неподвижной точкѣ той же самой горизонтальной плоскости.

Первоначально пластинку поддерживаютъ такимъ образомъ, чтобы нити не были натянуты, а затѣмъ даютъ ей медленно опускаться, пока не будетъ достигнуто равновѣсіе.

Нити удлиняются пропорціонально своимъ натяженіямъ.

Найти натяженіе каждой нити. Предполагается, что нити остаются вертикальными.

15. Однородная тяжелая цѣпь, имѣющая длину $2l$ и вѣсъ P , прикрѣплена своими концами въ двухъ точкахъ A и B горизонтальной плоскости, разстояніе между которыми равно $2a$. Система находится въ равновѣсіи. Требуется вычислить въ первомъ приближеніи, какія измѣненія претерпѣваетъ фигура равновѣсія, если къ самой низкой точкѣ цѣпи приложить вѣсъ p , очень малый сравнительно съ P .

16. Найти фигуру равновѣсія гибкой нерастяжимой однородной нити, которая закрѣплена въ двухъ своихъ концахъ A и B и всѣ точки которой находятся подъ дѣйствіемъ параллельныхъ силъ R , выражающихся формулой $R = a \sin^m \theta$; θ есть острый уголъ, образуемый направлениемъ силы и касательной къ кривой; a и m — константы. Обозначивъ черезъ ρ радиусъ кривизны въ какой-нибудь точкѣ нити, доказать соотношеніе

$$R\rho \sin^2 \theta = \text{const.}$$

Вычислить натяженіе въ каждой точкѣ и рассмотреть слѣдующіе частные случаи:

$$m = 0, \quad m = 1, \quad m = -1, \quad m = -2, \quad m = -3.$$

17. Концы однородной нити, имѣющей въ длину 2 м. и вѣсъ въ 2 г. , прикрѣплены къ двумъ точкамъ A и B одной горизонтальной прямой; $AB = 1\text{ м.}$ На нити виситъ кольцо M , которое вѣситъ 2 г. и можетъ скользить по нити.

Вычислить съ точностью до $0,0001\text{ м.}$ разстояніе прямой AB отъ точки, поддерживающей кольцо.

18. Тяжелая однородная нить покоится въ равновѣсіи на двухъ параллельныхъ горизонтальныхъ иглахъ, проекціями которыхъ въ вертикальной плоскости нити служатъ точки A и B . Разстояніе между иглами равно $2a$, а параметръ промежуточной цѣпи равенъ s .

Толщина иглъ принимается равной нулю.

1° Вычислить длину $2l$ всей нити.

2° Формулировать условіе устойчивости разсматриваемаго равновѣсія.

19. Къ двумъ неподвижнымъ точкамъ A и B , расположеннымъ на одной горизонтальной прямой и отстоящимъ на 2 м. одна отъ другой, прикрѣплена нить длиною въ 3 м.; вѣсомъ ея мы пренебрегаемъ.

Къ двумъ точкамъ C и D , которыя дѣлятъ нить на три равныя части, прикрѣплены два груза, вѣсомъ каждый въ 1 кг. Въ состояніи равновѣсія нить имѣетъ форму правильнаго полудесятиугольника.

Къ грузу, прикрѣпленному въ точкѣ D , прибавляютъ 1 г.; требуется приближенно вычислить перемѣщеніе точки C .

20. Тяжелая, однородная, гибкая и нерастяжимая нить натянута по перпендикулярному сѣченію негладкаго цилиндра, имѣющаго горизонтальныя образующія. Составить формулы, выражающія натяженіе нити и давленіе на поверхность въ каждой точкѣ нити.

Частный случай. — Данный цилиндръ есть тѣло вращенія; нить приложена къ верхней полуокружности; концы висятъ вертикально и несутъ данные грузы.

III.—ГЕОМЕТРИЯ МАССЪ.

1. Однородная плоская поверхность ограничена двумя взаимно перпендикулярными прямыми OA , OB и дугой окружности, касательной къ этимъ двумъ прямымъ.

Найти въ единицахъ $C. G. S.$:

1° разстоянія центра тяжести отъ двухъ прямыхъ OA и OB ;

2° моментъ инерціи площади вокругъ прямой AB .

Масса всей поверхности равна 2400.

$$OA = OB = 180.$$

2. Дана прямая однородная призма, перпендикулярное сѣченіе которой есть прямоугольный равнобедренный треугольникъ OAB ($OA = OB = a$); длина боковыхъ реберъ равна h ; плотность призмы ρ .

Найти моменты инерціи призмы вокругъ ея реберъ и опредѣлить длины математическихъ маятниковъ, синхронистическихъ съ физическими маятниками, которые можно получить, заставляя призму совершать качанія послѣдовательно вокругъ ея реберъ, при чемъ эти послѣднія предполагаютъ ся горизонтальными.

3. Въ однородномъ тетраэдрѣ $OABC$, имѣющемъ плотность ρ , трехгранный уголъ O — ортогональный, и три ребра OA , OB , OC имѣютъ одинаковую длину a . Три прямая OA , OB , OC служатъ осями x , y , z .

1° Обозначивъ черезъ m элементъ массы тѣла въ точкѣ x, y, z , составить суммы $\sum mx^2, \sum my^2, \sum mz^2, \sum myz, \sum mzx, \sum mxy$;

2° написать уравненіе эллипсоида инерціи тѣла для точки O относительно осей x, y, z ;

3° отнести этотъ эллипсоидъ къ системѣ главныхъ осей инерціи и найти значенія главныхъ моментовъ.

4. Дана однородная плоская поверхность $ASEB$, ограниченная дугой SE параболы, частью AS оси отъ вершины S до директриссы, частью AB директриссы и прямой BE , параллельной оси.

Вычислить разстояніе центра тяжести поверхности отъ прямыхъ AS и AB , а также моменты инерціи этой поверхности вокругъ прямыхъ AS и AB , предполагая, что

$$AS = 40, \quad BE = 90, \quad \text{плотность поверхности} = 1.$$

5. Вычислить координаты центра тяжести однородной дуги логариѳмической спирали, уравненіе которой

$$r = ae^{m\theta}.$$

Дугу берутъ между предѣлами $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$.

6. Определить центръ тяжести твердаго тѣла, образуемаго вращеніемъ круговаго сектора вокругъ одного изъ ограничивающихъ его радіусовъ:

$$\text{радіусъ окружности} \dots\dots\dots a = 0,580 \text{ м.}$$

$$\text{центральный уголъ сектора} \dots\dots a = 31^\circ 6' 23''.$$

7. Определить кривую, обладающую слѣдующимъ свойствомъ: абсцисса x_1 центра тяжести площади $OAMP$, ограниченной кривою, осью X -овъ, осью Y -овъ и переменнѣй ординатой MP , находится въ постоянномъ отношеніи m къ абсциссѣ x точки M , такъ что

$$x_1 = mx.$$

Разыскать кривую для болѣе общаго случая, когда

$$x_1 = mx^k,$$

гдѣ k есть заданное число.

Можно также разыскать кривую, удовлетворяющую условію $x_1 = \varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ есть заданная функція отъ x .

8. Въ однородномъ матеріальномъ тяжеломъ треугольникѣ OAB уголъ O прямой; катетъ $OA = 3$, $OB = 4$; масса треугольника равна 1.

Определить направленіе главныхъ осей инерціи и главные моменты инерціи для точки O .

9. Данъ однородный тетраэдръ $OABC$ съ ортогональнымъ трехграннымъ угломъ O . Ребра OA , OB , OC равны: $OA = a = 1$, $OB = b = \sqrt{2}$, $OC = c = \sqrt{3}$.

Требуется опредѣлить:

1° моментъ инерціи тетраэдра вокругъ произвольной прямой, проходящей черезъ вершину O ;

2° главные моменты инерціи тетраэдра для центра тяжести.

IV. — ДИНАМИКА ТОЧКИ.

1. Невѣсомая матеріальная точка M , имѣющая массу m , движется безъ тренія по сферѣ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

θ и ψ суть полярныя координаты (дополненіе широты и долготы). Точка находится подѣ дѣйствіемъ силы F , направленной постоянно по касательной къ меридіану; сила считается положительной въ направленіи возрастанія угла θ и отрицательной — въ противоположномъ направленіи.

1° Доказать, что сила F можетъ быть выражена формулой

$$F = -\frac{mA}{\sin^2 \theta} \left(\cot \theta + \frac{d^2 \cot \theta}{d\psi^2} \right),$$

гдѣ A есть положительная константа.

2° Предполагая, что сила F дана и равна

$$-\frac{m\mu \sin^2 \psi}{\sin^2 \theta} \quad (\mu > 0),$$

опредѣлить различныя траекторіи, которыя можетъ описать точка M , и показать, что всѣ конусы, вершиной которыхъ служить центръ сферы, а директриссами служатъ эти траекторіи, будутъ четвертой степени.

Разсмотрѣть слѣдующій частный случай:

$\psi_0 = 0$; начальная скорость v_0 перпендикулярна къ оси Oz , и

$$v_0^2 = -\frac{4\mu a}{3 \sin 2\theta} \quad \left(\theta_0 < \frac{\pi}{2} \right).$$

2. Тяжелая точка прикрѣплена къ концу нерастяжимой нити, подвѣшенной къ неподвижной точкѣ. Найти кривую, на которую должна быть накинута эта нить для того, чтобы при движеніи этого маятника натяженіе оставалось постояннымъ. Найти траекторію точки M . Найти законъ движенія.

3. Невѣсомая матеріальная точка M , движущаяся безъ тренія по параболоиду вращения, выражаемому уравненіемъ

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2\rho},$$

находится подѣ дѣйствіемъ силы, которая параллельна оси Oz и представляетъ собой извѣстную функцію разстоянія z точки отъ касательной плоскости въ вершинѣ

$$Z = mf(\epsilon) \quad (m \text{ масса точки}).$$

1° Найти движение точки, проекцию ее траектории на плоскость xu и реакцию поверхности.

2° Исследовать задачу для случая

$$Z = -\frac{m\mu}{z^2} \quad (\mu > 0);$$

3° Определить функцию $f(z)$ так, чтобы, распорядившись надлежащим образом начальными данными, можно было сделать реакцию постоянно равною нулю.

4. Материальная точка M , имѣющая массу m , движется безъ тренія по конусу вращенія S съ вертикальной осью; уголъ при вершинѣ равенъ 2α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Конусъ S ограниченъ своимъ верхнимъ основаніемъ.

Точка M притягивается къ оси конуса S силой, перпендикулярной къ этой оси; напряженіе притяженія равно k^2mr , гдѣ r есть разстояніе точки M отъ оси и k — численный коэффициентъ.

Найти движеніе, зная, что начальная скорость направлена по касательной къ параллельному кругу, отъ котораго начинается движеніе.

Вычислить нормальную реакцію конуса въ координатахъ точки M . Можетъ ли эта реакція обратиться въ нуль?

5. Тяжелое безконечно малое кольцо надѣто на гибкую, нерастяжимую, невѣсомую нить, вдоль которой оно можетъ скользить безъ тренія. Эта нить прикрѣплена своими концами къ двумъ неподвижнымъ точкамъ F и F' , лежащимъ на одной вертикальной прямой. Кольцу, занимающему положеніе M_0 на натянутой нити, сообщаютъ горизонтальную скорость, перпендикулярную къ плоскости FM_0F' и равную v_0 .

1° Найти движеніе кольца, предполагая, что нить остается натянутой.

2° Предполагая, что точка M_0 лежитъ въ срединѣ нити, вычислить и изучить натяженіе нити.

6. Кривая

$$x^2y = a^3 \quad (a \text{ const.}),$$

вращающаяся вокругъ оси y -овъ, направленной вертикально внизъ (въ направленіи силы тяжести), образуетъ поверхность вращенія.

Изучить движеніе тяжелой точки по этой поверхности и указать, при какихъ начальныхъ условіяхъ траекторія пересѣкаетъ меридіаны подъ постояннымъ угломъ.

Опредѣлить реакцію поверхности.

7. По поверхности, образованной вращеніемъ равносторонней гиперболы вокругъ ее оси, не пересѣкающей гиперболы, движется матеріальная точка, которая находится подъ дѣйствіемъ силы притяженія, перпендикулярной къ плоскости горла и обратно пропорціональной кубу разстоянія точки отъ этой плоскости; напряженіе силы на разстояніи единицы равно μ ; точка начинаетъ двигаться съ высоты h надъ этой плоскостью, имѣя начальную ско-

рость $v_0 = \frac{V\mu}{h}$, направленную по касательной къ параллели. Изучить движение. Вычислить реакцію.

8. Матеріальная точка M , масса которой равна 1 г., находится под дѣйствіемъ двухъ силъ, исходящихъ изъ одного неподвижнаго центра O , одной притягивающей и другой отталкивающей. Сила притяженія измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія точки M отъ центра O , а отталкивающая сила — обратно пропорціональна кубу того же самого разстоянія. Въ начальный моментъ точка M занимаетъ данное положеніе M_0 на разстояніи 0,01 м. отъ центра O ; отрѣзокъ, представляющій начальную скорость точки M , составляетъ уголъ въ 30° съ продолженіемъ вектора OM_0 , и длина этого отрѣзка равна 0,04 м.; въ этотъ начальный моментъ напряженіе силы притяженія равно 14 динамъ, а напряженіе отталкивательной силы равно 12 динамъ.

Найти траекторію и законъ движенія точки M .

9. Изучить движеніе невѣсомой точки, которая должна оставаться на параболоидѣ вращения и притягивается плоскостью, перпендикулярной къ его оси, съ силой, обратно пропорціональной квадрату разстоянія. Притягивающая плоскость есть геометрическое мѣсто директриссъ меридіанальныхъ параболъ. Движущаяся точка пущена со скоростью, равной $\sqrt{\frac{\mu}{z_0}}$ и направленной по касательной къ параллели, проходящей черезъ начальное положеніе, при чемъ μ есть коэффиціентъ притяженія (масса равна 1), а z_0 есть координата z начального положенія точки. Можно положить $z_0 = 2p$. Вычислить реакцію; притягивающую плоскость принять за плоскость xy .

10. Допустимъ, что земля есть неподвижный однородный шаръ, котораго окружность большаго круга имѣетъ въ длину 40 милліоновъ метровъ и который притягиваетъ точку, имѣющую массу m и лежащую на поверхности шара, съ силой mg ; g выражается числомъ 9,8, если за единицу длины принять метръ и за единицу времени секунду.

Вычислить по закону всемірнаго притяженія скорость, съ которой достигнетъ поверхности земли матеріальная вѣсомая точка, пущенная безъ скорости,

1° если разстояніе начального положенія точки до центра земли равно 2 радіусамъ земнаго шара, и

2° если разстояніе равно 60 радіусамъ земнаго шара.

Во что обратится приобрѣтенная скорость, если разстояніе начального положенія отъ центра безпредѣльно возрастаетъ?

11. Определить движеніе точки M , которая должна оставаться на сферѣ и притягивается къ діаметру ZZ' съ силой $\frac{m\lambda^2 R^4}{u^3}$; λ есть постоянная, u — разстояніе точки M отъ діаметра ZZ' . Найти давленіе на сферу. Исслѣдовать случай, когда точка M въ начальный моментъ находится на окруж-

ности большого круга, перпендикулярнаго къ оси ZZ' , и скорость точки образуетъ съ этой осью уголъ въ 45° .

12. Свободная матеріальная точка опредѣлена своими полярными координатами (r, θ, φ) . Она находится подъ дѣйствіемъ силы, произведенной силовою функціей U , при чемъ

$$U = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

гдѣ функціи f, g, h зависятъ каждая лишь отъ той перемѣнной, которая явно указана.

1° Составить выраженіе живой силы точки и уравненія Лагранжа въ параметрахъ r, θ, φ .

2° Показать, что эти уравненія интегрируются при помощи квадратуръ.

13. Въ вертикальной плоскости даны двѣ неподвижныя прямыя Ox и Oy . Прямая Oy вертикальна, а прямая Ox составляетъ съ прямой Oy уголъ въ 60° . Двѣ тяжелыя точки A и B , имѣющія одинаковый вѣсъ, должны скользить безъ тренія, одна по прямой Oy , другая по Ox . Эти точки взаимно притягиваются съ силой, пропорціональной разстоянію между ними и произведенію ихъ массъ. Притяженіе на разстояніи $2a$ равно вѣсу одной изъ точекъ.

Въ началѣ времяъ точки не имѣютъ скорости и находятся каждая на разстояніи $2a$ отъ точки O . Найти ихъ движеніе.

14. Матеріальная точка, масса которой равна единицѣ, движется подъ вліяніемъ центральной силы, исходящей отъ точки O . Требуется опредѣлить траекторію и законъ силы, зная, что годографъ движенія, построенный изъ точки O , какъ полюса, есть окружность, имѣющая центръ въ точкѣ O .

15. Дана винтовая линія H , которая мѣняется вмѣстѣ съ временемъ t и опредѣляется уравненіями

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = (K + nt) \varphi,$$

гдѣ R, K, n — положительныя постоянныя величины; ось z направлена вертикально вверхъ.

Тяжелая точка M , имѣющая массу m , должна двигаться по винтовой линіи H съ треніемъ, при чемъ коэффиціентъ тренія равенъ f .

Составить дифференціальныя уравненія движенія и найти дифференціальное уравненіе Ω , связывающее φ и t .

Интегрировать дифференціальное уравненіе для случая, когда $f=0$ и когда, при $t=0$, имѣемъ

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

16. Матеріальная точка, которая имѣетъ массу 1 и должна двигаться безъ тренія по сферѣ радіуса 1, притягивается съ силой, обратно propor-

ціональної кубу розстояння, тремя взаємно перпендикулярними площинами, проходящими через центр сфери.

1° Доказать, что при движении реакция сферы есть величина постоянная.

2° Найти конечные уравнения траектории, которая есть алгебраическая кривая (начальные условия произвольны).

3° Определить положение равновесия точки.

17. Материальная точка M , имѣющая массу 1, движется безъ тренія по плоскости, будучи притягиваема съ силой, пропорціональной разстоянію, двумя точками этой плоскости: неподвижной точкой O и точкой S , равномерно обращающейся около точки O . Требуется определить траекторію точки M относительно движущейся прямой OS .

18. Движеніе тяжелой точки, которая скользитъ безъ тренія по наклонной плоскости.

Обозначенія принимаются слѣдующія:

O — начальное положеніе движущейся точки, Ox — горизонтальная прямая, проведенная въ данной плоскости; Oy — прямая наибольшаго ската направленная въ сторону возрастающихъ координатъ; α — уголъ наклонной плоскости съ горизонтальной; f — коэффициентъ тренія.

Требуется вычислить координаты (x, y) движущейся точки M во время t и самое время t посредствомъ вспомогательной переменнй

$$u = \tan \frac{\theta}{2},$$

гдѣ θ обозначаетъ уголъ оси Oy съ касательной къ траекторіи въ точкѣ M .

Исслѣдовать различныя фазы движенія, измѣняя значенія коэффициента f .

19. Материальная точка, имѣющая массу m , находится подѣ дѣйствіемъ притягивающей центральной силы $\frac{mR}{r^2}$; R есть постоянная, а r — разстояніе точки отъ центра притяженія. Въ нѣкоторый моментъ она находится въ данной точкѣ A и имѣетъ данную скорость v .

Определить направленіе этой скорости, зная, что траекторія проходить черезъ вторую данную точку B .

Исслѣдовать задачу.

20. Тяжелая точка, которая должна двигаться по сферѣ, имѣющей радиусъ въ 2 м., была пущена такъ, чтобы ея траекторія оставалась заключенной между горизонтальной плоскостью, проходящей черезъ центръ, и плоскостью, проходящей параллельно первой на одинъ метръ ниже ея. Вычислить съ точностью до 0,0001 сек., за какое время движущаяся точка пройдетъ отъ самой высокой до самой низкой точки этой траекторіи, предполагая, что $g = \pi^2$.

21. Точка M , имѣющая массу 1, вынужденная оставаться на поверхности S , опредѣляемой уравненіями

$$x = u \cos \psi, \quad y = u \sin \psi, \quad z = m \psi,$$

притягивается къ оси z -овъ съ силой $\frac{m^4 \psi^2}{u^3}$; въ начальный моментъ

$$u = m, \quad \psi = 0, \quad \frac{du}{dt} = \frac{m\omega}{\sqrt{2}}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{2}.$$

Опредѣлить движеніе точки M и ея давленіе на поверхность S .

22. Вычислить съ точностью до 0,001 сек., за какое время тяжелая точка пробѣгаетъ окружность, имѣющую радіусъ въ 1 м. и расположенную въ вертикальной плоскости. Скорость въ самой высокой точкѣ равна $2\sqrt{g}$ ($g = 9,809$ м.). Найти скорость въ низшей точкѣ окружности.

23. Метательнымъ снарядомъ, который вѣситъ 50 г. и имѣетъ начальную скорость 10 м. въ сек., жаляютъ попасть въ точку, лежащую на разстояніи 5 м. отъ снаряда и выше его на 3 м.

Требуется вычислить:

- 1° уголъ начальной скорости съ горизонтомъ;
- 2° величину конечной скорости и уголъ ея съ горизонтомъ;
- 3° количество энергіи, теряемое снарядомъ;
- 4° продолжительность движенія.

Спротивленіе воздуха не принимается во вниманіе.

Ускореніе силы тяжести $g = 9,81$ м.

24. Эллипсоидъ вращенія E деформируется слѣдующимъ образомъ: 1° его ось не измѣняетъ ни своей длины, ни направленія, ни положенія; 2° радіусъ экватора возрастаетъ пропорціонально времени; 3° каждая точка поверхности эллипсоида E остается въ своемъ меридіанѣ на неизмѣнномъ разстояніи отъ плоскости экватора.

Точка M , имѣющая массу m , 1° принуждена скользить безъ тренія по поверхности E , 2° отталкивается осью съ силой, перпендикулярной къ этой оси и пропорціональной разстоянію точки M отъ оси.

Изучить движеніе точки M . Разсмотрѣть частный случай, когда начальная скорость направлена по касательной къ начальному меридіану.

25. Точка M , имѣющая массу 1, движется по оси $X'OX$ подъ дѣйствіемъ силы $X = -\varphi(x)$; она испытываетъ въ сторону, противоположную ея скорости, сопротивленіе $\frac{2v^2}{a+x}$; a есть положительная константа; при $t=0$ скорость v есть нуль, и координата x имѣетъ положительное значеніе x_0 . Определить функцію $\varphi(x)$ такимъ образомъ, чтобы точка M достигла начала O за время T , независящее отъ значенія x_0 ; указать, въ какой точкѣ она останавливается, и найти уравненіе ея дальнѣйшаго движенія.

26. Совершенно гладкая поверхность Π обладаетъ равномернымъ винтовымъ движеніемъ вокругъ неподвижной оси; постоянный уголъ α этой плоскости съ осью опредѣляется формулой

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Изучить движеніе тяжелой точки, которая должна двигаться безъ тренія по этой плоскости II.

27. Шарообразный предметъ брошенъ въ воздухъ вертикально вверхъ съ скоростью 18 м. въ секунду. Спротивленіе воздуха считается пропорціональнымъ квадрату скорости, и, кромѣ того, принимаютъ, что при скорости, равной 80 м. въ секунду, это сопротивленіе равно вѣсу движущагося тѣла.

Вычислить:

1° высоту поднятія брошеннаго тѣла,

2° продолжительность поднятія и продолжительность паденія.

Дано:

$$g = 9.81 \text{ м.}, \quad e = 2,7183.$$

28. Какую скорость долженъ имѣть математическій маятникъ въ низшей точкѣ своей траекторіи для того, чтобы натяженіе нити обратилось въ нуль, когда уголь этой нити съ прямой, направленной вертикально вверхъ, будетъ равенъ 45° ?

Начиная съ момента, когда натяженіе будетъ такимъ образомъ равно нулю, движеніе точки становится параболическимъ; опредѣлить, гдѣ точка встрѣтитъ горизонтальную прямую, проходящую черезъ точку прикрѣпленія нити.

Данныя (въ единицахъ *C. G. S.*): длина маятника $l = 87$, ускореніе силы тяжести $g = 980$.

V. — ДИНАМИКА СИСТЕМЪ.

1. Парабола, обращенная вогнутостью вверхъ, можетъ свободно вращаться вокругъ вертикальной оси; концы однороднаго тяжелаго стержня AB , имѣющаго длину $2l$, должны скользить безъ тренія по параболѣ, масса которой считается равной нулю.

Найти уравненія движенія системы. Вычислить реакціи въ точкахъ A и B . Опредѣлить положенія относительнаго равновѣсія. Изучить малыя движенія въ окрестности этихъ положеній.

2. Однородная очень тонкая пластинка, свободная отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ, имѣетъ форму равнобедреннаго треугольника OAB , высота котораго OH , представляющая собой биссектрису угла O , равна h , а основаніе $AB = h\sqrt{6}$. Пластинка можетъ вращаться вокругъ неподвижной вершины O .

Опредѣлить движеніе пластинки, предполагая, что въ начальный моментъ она обладаетъ вращеніемъ 2ω вокругъ оси, которая въ плоскости OAB проектируется по прямой OH и составляетъ съ этой прямой уголъ въ 30° .

3. Тяжелый сочлененный ромб $OABA'$ состоит из четырех стержней, имеющих одинаковую массу M и одинаковую длину l . Одна вершина O ромба свободна; противоположная вершина B описывает нисходящую вертикальную прямую Oz_1 , проходящую через вершину O . Связи без трения.

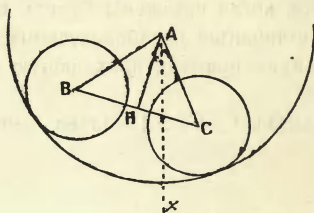
Обозначим через 2θ угол AOA' ромба, через ψ — угол плоскости ромба с неподвижной вертикальной плоскостью x_1Oz_1 .

1° Определить движение системы и исследовать его в частном случае, когда производная угла θ по времени в начальный момент равна нулю.

2° Рассмотреть вторую систему, тождественную с предыдущей и подчиненную тем же связям и, сверх того, новой связи, которая заставляет плоскость ромба равномерно вращаться вокруг оси Oz_1 . Определить движение системы.

Для этого последнего вопроса исследования не требуется.

4. Однородная пластинка, толщиной которой можно пренебречь, имеет форму равностороннего треугольника, сторона которого равна a . Тре-



Фиг. 209.

угольник иметь вѣсъ и долженъ двигаться въ неподвижной вертикальной плоскости. Въ точкахъ B и C нормально къ плоскости треугольника всажены два шипа, массы и размѣры которыхъ можно считать равными нулю. Каждый шипъ служить осью двухъ безконечно тонкихъ, круговыхъ тяжелыхъ колесъ, нормальныхъ къ шипамъ и находящихся на одинаковомъ разстояніи отъ плоскости треугольника.

Четыре колеса имѣютъ одинаковую массу m и одинъ и тотъ же радиусъ r ; они опираются на внутреннюю поверхность прямого кругового цилиндра, котораго радиусъ равенъ $a+r$, а образующія нормальны къ плоскости пластинки. Колеса могутъ лишь катиться безъ скольженія по цилиндру. Связи безъ трения.

Пусть $АН$ будетъ высота треугольника, проведенная изъ вершины A , θ — уголъ высоты $АН$ съ направленной внизъ вертикальной прямой Az , θ' — производная угла θ по времени t .

1° Определить моментъ инерціи I треугольника ABC около вершины A .

2° Вычислить (для заданныхъ значеній θ и θ') угловыя скорости колесъ относительно осей, имѣющихъ постоянныя направленія.

3° Написать уравнение движенія системы, опредѣлить продолжительность безконечно малых качаній около положенія устойчиваго равновѣсія.

4° Вычислить реакціи шиповъ на пластинку ABC . Допускаютъ, что эти реакціи лежатъ въ плоскости пластинки и нормальны къ окружности, описываемой точками B и C .

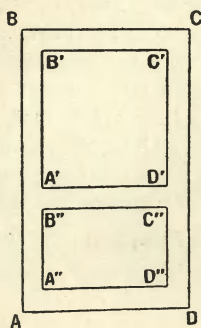
5. 1° Вершина однороднаго тяжелаго конуса должна двигаться безъ тренія по неподвижной наклонной плоскости.

2° Изучить подробно движеніе конуса и, въ частности, узнать, коснется ли конусъ неподвижной плоскости при слѣдующихъ предположеніяхъ: радіусъ основанія конуса равенъ 1, высота равна 2, косинусъ угла неподвижной плоскости съ горизонтомъ равенъ $\frac{3}{155}$. Въ началѣ движенія ось конуса находится въ покоѣ и перпендикулярна къ неподвижной плоскости; конусъ обладаетъ даннымъ вращеніемъ вокругъ своей оси.

6. Однородный тяжелый твердый стержень AB можетъ свободно вращаться вокругъ своего конца A . Къ другому концу B прикрѣплена гибкая и нерастяжимая нить BOP , массу которой можно принять равной нулю; въ неподвижной точкѣ O нить проходитъ сквозь очень малое кольцо и дальше падаетъ въ вертикальномъ направленіи, поддерживая грузъ P . Всѣ элементы остаются въ одной и той же вертикальной плоскости; неподвижныя точки A и O лежатъ на одной горизонтальной прямой, и разстояніе AO равно длинѣ стержня; тренія нѣтъ.

Опредѣлить положенія равновѣсія и изучить возможные движенія системы, въ частности, малыя движенія. Вычислить реакціи.

7. Найти центръ удара прямоугольника, движущагося вокругъ одной изъ своихъ сторонъ.



Фиг. 210.

Разсматриваемый четырехугольникъ охватываетъ рѣшето, состоящее изъ рамы съ перекладиной, въ которыя вставлены двѣ сѣтки $A'B'C'D'$ и $A''B''C''D''$.

Рама и перекладина имѣютъ одинаковую плотность ϱ ; сѣтки имѣютъ плотность

$$\varrho' = \frac{2}{3} \varrho.$$

Размѣры:

$$AB = 2,10 \text{ м.}, \quad BC = 0,80 \text{ м.},$$

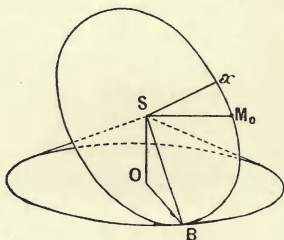
$$A'B' = 1 \text{ м.}, \quad B'C' = 0,60 \text{ м.},$$

$$B''A' = 0,10 \text{ м.}, \quad A''B'' = 0,80 \text{ м.}$$

Ширина борта рамы: 0,10 м.

8. Данъ абсолютно неподвижный прямой круговой конусъ, имѣющій вертикальную ось SO и опирающійся своимъ основаніемъ на горизонтальную плоскость.

Круговое колесо, радіусъ котораго равенъ образующей SB конуса, снабжено на своей окружности кольцевымъ каналомъ съ очень малымъ по-



Фиг. 211.

перечнымъ сѣченіемъ; внутрь канала введенъ тяжелый однородный шаръ, имѣющій массу m и очень малый діаметръ, равный діаметру канала; шаръ можетъ скользить въ этомъ каналѣ безъ тренія (фиг. 211). Требуется изучить относительное движеніе шара въ каналѣ.

Даны: α — уголъ при вершинѣ конуса; ω — постоянная угловая скорость вращенія плоскости колеса вокругъ любой образующей конуса; R — радіусъ колеса; φ_0 — уголъ радіуса SM_0 колеса съ горизонтальной прямой Sx , проведенной въ плоскости колеса въ начальный моментъ.

Начальная относительная скорость предполагается равной нулю.

9. Радіусъ шара равенъ единицѣ; плотность шара въ любой точкѣ, разстояніе которой отъ центра обозначимъ черезъ r , слѣдуетъ закону

$$\delta = \frac{3}{2} e^{-r}, \quad e = 2,71828.$$

Требуется:

- 1° Найти массу всего шара.
- 2° Найти моментъ инерціи шара вокругъ какого-либо изъ его діаметровъ.

3° Предполагая, что этотъ шаръ обладаетъ равномернымъ поступательнымъ движеніемъ со скоростью $\frac{1}{200}$ единицы длины въ секунду и вращается вокругъ одного изъ своихъ діаметровъ, совершая одинъ оборотъ въ 24 часа, вычислить разстояніе отъ центра до удара, который могъ бы сообщить шару это двойное движеніе.

10. Дана прямоугольная система осей $Oxyz$ съ вертикальной осью Oz и двѣ прямыя

$$D \begin{cases} y=0, \\ z=a, \end{cases} \quad D' \begin{cases} x=0, \\ z=-a, \end{cases}$$

лежащая соответственно въ плоскостяхъ xOz , yOz . Тяжелый однородный матеріальный стержень, имѣющій длину $2l$, долженъ скользить безъ тренія своими концами по прямымъ D и D' . Кромѣ того, каждая матеріальная точка стержня притягивается точкой O съ силой, пропорціональной массѣ точки и ея разстоянію отъ точки O .

1° Найти движеніе стержня.

2° Вообразивъ, что рассматриваемый стержень есть часть плоской фигуры, плоскость которой должна оставаться постоянной, изучить движеніе этой фигуры съ точки зрѣнія кинематики. Найти геометрическое мѣсто, произведенное движеніемъ какой-либо точки фигуры.

11. Два однородныхъ невѣсомыхъ равныхъ стержня OA и AB сочленены въ точкѣ A ; стержень OA можетъ вращаться около неподвижной точки O , а точка B скользитъ по неподвижной прямой OZ ; каждый элементъ обоихъ стержней притягивается къ прямой OZ съ силой, которая равна произведенію его массы на разстояніе отъ прямой OZ .

Обозначимъ черезъ θ уголъ ZOA , Ψ — уголъ плоскости OAB съ неподвижной плоскостью, проведенной черезъ ось OZ . Предполагая, что вначалѣ движеніе системы извѣстно, требуется составить и изслѣдовать уравненія, опредѣляющія углы θ и Ψ . Начальныя условія: 1° уголъ θ остается постояннымъ; 2° производная $\frac{d\theta}{dt}$ обращается въ нуль при $\theta = \frac{\pi}{2}$; можетъ ли это имѣть мѣсто по истеченіи конечнаго промежутка времени?

12. Тяжелое твердое тѣло S ограничено извнѣ сферой радіуса a . Массы распределены такимъ образомъ, что центръ тяжести G тѣла S совпадаетъ съ центромъ сферы, и эллипсоидъ инерціи, соответствующій этой точкѣ, есть поверхность вращенія; пусть Gz будетъ ось вращенія.

Это тѣло находится внутри полого шара Σ , имѣющаго центръ въ точкѣ O и радіусъ, равный $R + a$. [Этотъ шаръ неподвиженъ; связь безъ тренія.

Опредѣлить движеніе тѣла S , примѣняя сперва общія теоремы, а затѣмъ уравненія Лагранжа. Положеніе тѣла S опредѣляется угломъ θ прямой OG съ направленной внизъ вертикальной прямой Oz , черезъ точку O ,

угломъ ψ плоскости GOz съ неподвижной вертикальной плоскостью и Эйлеровыми углами $\psi_1, \theta_1, \varphi_1$, опредѣляющими относительную ориентировку двухъ ортогональных трехгранныхъ угловъ $Gxuz, Ox_1y_1z_1$; первый изъ нихъ связанъ съ твердымъ тѣломъ S и представляетъ собою трехгранный уголъ главныхъ осей инерціи, а второй — неподвиженъ.

Масса тѣла S равна M ; A и C — моменты инерціи вокругъ осей Gx и Gz .

13. Въ неподвижномъ ортогональномъ трехгранномъ углу $Oxuz$ ось Oy горизонтальна, и внутренней биссектриссой угла zOx служитъ прямая, направленная вертикально внизъ.

Вершина O трехграннаго угла и другая точка O' , лежащая на оси Oz на разстояніи $2R$ отъ точки O , представляютъ собою два конца діаметра, ограничивающаго однородный тяжелый полукругъ, имѣющій массу M . Этотъ полукругъ можетъ, слѣдовательно, вращаться вокругъ оси Oz ; связь безъ тренія.

1° Предполагая, что полукругъ лежитъ въ плоскости zOx , опредѣлить координаты его центра тяжести и уравненіе эллипсоида инерціи для точки O .

2° Предположимъ, что полукругъ помѣщенъ въ плоскости zOy безъ скорости. Онъ начинаетъ совершать качанія вокругъ оси Oz . Опредѣлить реакціи, производимыя точками O и O' , когда плоскость полукруга совпадаетъ съ плоскостью zOx .

14. Цилиндръ вращенія, имѣющій вертикальную ось, равномерно вращается вокругъ одной своей образующей G . Тяжелая матеріальная точка должна оставаться на поверхности этого цилиндра, которая разсматривается, какъ совершенно гладкая; она притягивается прямой G съ силой, пропорціональной разстоянію. Изучить относительное движеніе по цилиндру (начальныя условія произвольны; сдѣлать изслѣдованіе).

15. Сочлененный ромбъ $OABC$, состоящій изъ четырехъ тождественныхъ однородныхъ и тяжелыхъ стержней, можетъ скользить безъ тренія въ вертикальной плоскости. Вершина O неподвижна, и ромбъ первоначально находится въ покоѣ, при чемъ вершина C лежитъ на вертикальной прямой точки O , и уголъ $AOB = 60^\circ$. Длина стержня равна 1 м. Опредѣлить скорость вершины C въ моментъ, когда она придетъ въ точку O .

Значеніе g равно 9,8088; единицей времени служить секунда средняго времени.

16. Два тождественныхъ однородныхъ тяжелыхъ стержня OA, OB могутъ вращаться въ вертикальной плоскости вокругъ одного своего конца, укрѣпленнаго въ общей точкѣ O . Они соединены невѣсомой эластической нитью AB . Въ своемъ начальномъ положеніи эта нить не натянута; длина стержней и нити въ общей сложности тогда составляетъ 1 м. при этомъ нить AB горизонтальна. Натяженіе эластической нити пропорціонально ея удлиненію. Дать законченное изслѣдованіе, опираясь на то, что система, предоставленная самой себѣ, придетъ безъ скорости въ такое положеніе, при которомъ нить AB лежитъ на горизонтальной прямой, проходящей черезъ точку O . Всѣхъ каждого стержня равенъ 1 кг.

17. Двѣ тяжелыя точки M и M' , имѣющія одинаковыя массы, связаны невѣсомой, гибкой и нерастяжимой нитью. Точка M описываетъ безъ тренія неподвижную вертикальную прямую, а точка M' должна перемѣщаться безъ тренія въ плоскости P , содержащей эту вертикаль и равномерно вращающейся вокругъ нея съ угловой скоростью ω . Въ началѣ движенія точка M неподвижна; прямая MM' составляетъ съ прямой, проведенной изъ точки M вертикально внизъ, уголъ въ 45° ; относительная скорость точки M' въ плоскости P равна V_0 , перпендикулярна къ прямой $M'M$ и направлена относительно этой прямой въ ту же сторону, что и вертикаль, идущая вверхъ.

Найти движеніе обѣихъ точекъ; показать, что нить остается натянутой во время движенія.

18. Найти движеніе тяжелой матеріальной точки относительно поверхности земли, когда сопротивленіе среды пропорціонально скорости; принять въ расчетъ скорость вращенія земли, равную ω .

Замѣчаніе. — Предполагается, что движущаяся точка остается въ области, въ которой ея вѣсъ (результатирующая силы притяженія и центробѣжной силы) можно считать постояннымъ по величинѣ и направленію; степени скорости ω съ показателемъ, превышающимъ 2, отбрасываются.

19. Тяжелая тонкая пластинка вѣсомъ въ 10 кг. имѣетъ форму лемнискаты, которая въ полярныхъ координатахъ выражается уравненіемъ

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\phi,$$

гдѣ

$$a = 0,5 \text{ м.}$$

1° Вычислить моментъ инерціи пластинки вокругъ полярной оси Ox .

Предполагая, что эта пластинка равномерно вращается вокругъ этой оси Ox , совершая 24 оборота въ секунду, найти силу удара, который, будучи приложенъ перпендикулярно къ пластинкѣ въ ея наиболѣе удаленной отъ оси точкѣ A , можетъ привести пластинку въ состояніе покоя.

20. На твердое тѣло, движущееся вокругъ оси, дѣйствуютъ слѣдующія силы: 1° сила, моментъ которой пропорціоналенъ угловому разстоянію u между положеніемъ тѣла въ разсматриваемый моментъ и его положеніемъ равновѣсія и противоположенъ ему по знаку; 2° сопротивленіе, моментъ котораго пропорціоналенъ угловой скорости; 3° сила, зависящая отъ времени и выражающаяся непрерывной періодической функцией $F(t)$ съ періодомъ θ .

Найти, какимъ условіямъ должны удовлетворять начальное отклоненіе u_0 и начальная угловая скорость ω_0 для того, чтобы движеніе тѣла было строго періодическимъ.

Изучить слѣдующіе частные случаи:

Первый случай:

$$F(t) = A \sin \left(2\pi \frac{t}{\theta} \right).$$

Второй случай:

$$F(t) = B \quad \text{при} \quad -\varepsilon < t < +\varepsilon,$$

$$F(t) = 0 \quad \text{при} \quad -\theta < t < -\varepsilon \quad \text{и} \quad \varepsilon < t < \theta,$$

гдѣ A и B двѣ константы, отличныя отъ нуля, и ε константа, которая меньше, чѣмъ θ .

21. Колесо, радіусъ котораго равенъ a , представляетъ собою однородную тяжелую твердую окружность; толщиной ея (т. е. поперечнымъ сѣченіемъ) можно пренебречь, а линейная плотность равна k . Окружность связана съ центромъ O твердыми радіусами, массу которыхъ можно считать равной нулю. Къ центру O приложенъ вѣсъ $Q = mg$.

Въ началѣ движенія колесо пущено такимъ образомъ, что оно поднимается, катясь безъ скольженія, по линіи наибольшаго ската плоскости, наклоненной къ горизонтальной плоскости подъ угломъ α .

Начиная съ этого момента, къ опредѣленной точкѣ M_1 колеса прилагаютъ силу F , имѣющую постоянное напряженіе, но направленную въ сторону движенія по касательной къ колесу въ точкѣ M_1 .

Предполагается, что относительно плоскости колесо все время можетъ лишь катиться безъ скольженія. Изучить движеніе.

22. Тяжелое твердое тѣло должно совершать винтовое движеніе вокругъ вертикальной оси; ходъ равенъ $2l\pi$.

Изучить дѣйствіе удара на это тѣло.

Вычислить въ функціи отъ разсматриваемаго удара:

1° приращеніе угловой скорости;

2° удары связи.

Предполагается, что тѣло вначалѣ находится въ покоѣ, и результирующая скорость удара направлена такъ, что тѣло подымается вверхъ.

Изучить послѣдующее непрерывное движеніе и опредѣлить высоту, до которой подымется тѣло.

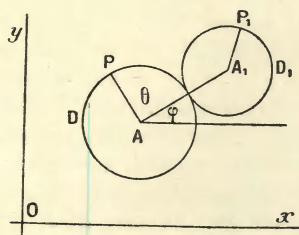
Треніе не принимается въ расчетъ.

Примѣнить къ случаю, когда разсматриваемое тѣло есть полый однородный цилиндръ вращенія, осью котораго служить ось движенія.

23. Два тяжелыхъ однородныхъ, бесконечно тонкихъ круговыхъ диска D и D_1 съ центрами въ точкахъ A и A_1 (фиг. 212) скользятъ безъ тренія по горизонтальной плоскости xOy . Они должны катиться (безъ скольженія) другъ по другу. Ихъ массы M и M_1 обратно пропорціональны ихъ радіусамъ R и R_1 , и каждая матеріальная точка этихъ дисковъ притягивается къ началу O съ силой, пропорціональной ея массѣ и разстоянію отъ центра O ; коэффициентъ пропорціональности равенъ ω^2 .

Обозначимъ черезъ ξ , η координаты центра тяжести системы двухъ дисковъ, черезъ φ — уголъ отрѣзка AA_1 съ осью Ox и черезъ θ уголъ отрѣзка AA_1 съ матеріальнымъ радіусомъ AP , который въ начальный мо-

ментъ совпадаетъ съ отрезкомъ $\overline{AA_1}$. Эти углы считаются положительными въ направленіи отъ оси Ox къ Oy .



Фиг. 212.

Изучить движеніе системы при слѣдующихъ начальныхъ условіяхъ:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 2R, & \eta_0 &= 0, & \varphi_0 &= 0, & \theta_0 &= 0, \\ \xi'_0 &= 0, & \eta'_0 &= 2R\omega, & \varphi'_0 &= \omega, & \theta'_0 &= -2\omega. \end{aligned}$$

Каковы будутъ при этихъ начальныхъ условіяхъ абсолютныя движенія дисковъ съ точки зрѣнія кинематики?

24. Движеніе тора вокругъ неподвижной точки. Однородный тяжелый торъ, въ которомъ образующая окружность имѣетъ радіусъ $a = 2$ см. и центръ котораго находится на разстояніи $d = 15$ см. отъ оси вращенія, вращается со скоростью 5000 оборотовъ въ минуту вокругъ этой оси. Разстояніе l отъ центра его массы до неподвижной точки этой оси равенъ 1 см., и начальный наклонъ θ_0 оси къ вертикали, направленной вверхъ, составляетъ 50 градусовъ.

Опредѣлить продолжительность T и амплитуду Θ нутаціи, скорость Ψ' средней прецессіи и время T , въ теченіе котораго ось тора успѣваетъ совершить полный оборотъ вокругъ вертикали $g = 981$ (C. G. S.).

25. Однородный правильный октаэдръ, имѣющій массу M и ребро $a = \sqrt{2}$, можетъ вращаться вокругъ неподвижной вершины O ; всѣ его точки свободны отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ, исключая вершину S , противоположную вершинѣ O : она притягивается къ неподвижной точкѣ P съ силой $\frac{1}{3} \frac{M\omega^2 a^4}{SP^3}$; $OP = 4a$. Въ начальный моментъ октаэдръ вращается съ

скоростью ω вокругъ мгновенной оси OS , и уголъ POS — прямой. Определить движеніе октаэдра и траекторію точки S .

26. Твердое тѣло S движется вокругъ неподвижной вертикальной оси Oz_1 , направленной внизъ. Второе твердое тѣло движется вокругъ горизонтальной оси Ox , неизмѣнно связанной съ тѣломъ S и пересѣкающей ось Oz_1 въ точкѣ O . Ось Ox есть главная ось инерціи тѣла S' для точки O ; двѣ другія главные оси инерціи обозначены черезъ Oy и Oz .

Пусть Ox_1, Oy_1 будут двѣ неподвижныя взаимно перпендикулярныя горизонтальныя прямыя; обозначимъ черезъ Ψ уголъ $\widehat{x_1Ox}$ и черезъ θ уголъ $\widehat{z_1Oz}$. Назовемъ черезъ I моментъ инерціи тѣла S вокругъ оси Oz_1 , A, B, C — моменты инерціи тѣла S' вокругъ осей Ox, Oy, Oz . Центръ тяжести G тѣла S' лежитъ на оси Oz на разстояніи a отъ точки O .

Тѣло S' имѣетъ вѣсъ, и связи осуществлены безъ тренія.

Написать дифференціальныя уравненія движенія системы; показать, что они интегрируются посредствомъ квадратуръ. Изслѣдованія не требуется.

Реакціи, соотвѣтствующія связямъ, которымъ подчинено тѣло S' , приводятся къ одной силѣ, проходящей черезъ точку O и къ парѣ. Показать, что ось этой пары нормальна къ плоскости xOz_1 и указать методъ для вычисленія момента этой пары.

27. Два однородныхъ круга, имѣющихъ радіусы одинаковой длины a и одинаковыя массы m , должны оставаться на вертикальной плоскости и катиться безъ тренія по неподвижной горизонтальной прямой этой плоскости. Ихъ центры C и C' соединены однороднымъ стержнемъ, имѣющимъ массу M и длину $l (l > 2a)$. Кромѣ того, двѣ точки B и B' этихъ круговъ, лежащія на одинаковомъ разстояніи b отъ ихъ центровъ, соединены стержнемъ, имѣющимъ массу μ и такую же длину, какъ и предыдущій. Этотъ стержень BB' есть шатунъ; фигура $CBB'C$ есть, слѣдовательно, сочлененный параллелограммъ.

Выразить отсутствіе скольженія посредствомъ соотношенія, связывающаго абсциссу x середины A отрезка CC' съ угломъ θ , образуемымъ прямою CB съ осью Ox . Какова должна быть сила, приложенная въ точкѣ A , для того, чтобы удержать систему въ равновѣсіи, если уголъ θ имѣетъ данное значеніе? (Различныя части системы имѣютъ вѣсъ).

Вычислить живую силу движущейся системы въ функціи отъ θ и $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$. Составить уравненіе движенія системы, если заданными силами являются лишь вѣса различныхъ частей системы.

Найти продолжительность малыхъ качаній около положенія устойчиваго равновѣсія.

Предположимъ, что система находится въ покоѣ, въ положеніи устойчиваго равновѣсія, и матеріальная точка массы m' , обладающая скоростью V , которая составляетъ съ осью Ox уголъ въ 30° и направлена внизъ, ударяетъ въ середину стержня CC' и остается неподвижной въ этой точкѣ. Определить распредѣленіе скоростей въ измѣненной такимъ образомъ системѣ непосредственно послѣ удара.

Связи безъ тренія.

28. Однородный круговой каналъ можетъ вращаться вокругъ одного изъ своихъ діаметровъ, неподвижнаго и вертикальнаго.

Въ этомъ каналѣ движется тяжелая точка, масса которой вдвое меньше массы канала.

Найти движеніе этой системы и давленіе точки на каналъ.

Въ начальный моментъ радіусъ, проходящій черезъ точку, горизонталенъ, относительная скорость точки на каналъ равна нулю, и каналъ вращается съ угловой скоростью ω , удовлетворяющей равенству $g = R\omega^2$; g есть ускореніе силы тяжести и R — радіусъ канала.

Будетъ ли движеніе періодическимъ или нѣтъ?

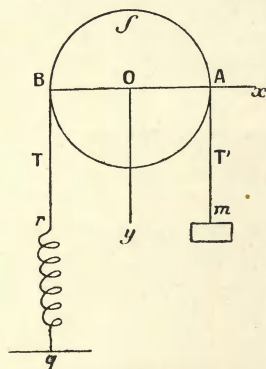
29. Совершенно твердая окружность, радіусъ которой равенъ единицѣ, равномерно вращается съ угловой скоростью ω вокругъ неподвижной оси, проходящей черезъ ея центръ и перпендикулярной къ ея плоскости. Невѣсомая матеріальная точка, имѣющая массу 1 и движущаяся въ плоскости окружности, скользитъ безъ тренія по окружности съ ея внутренней стороны. Эта точка связана съ точкой A , неподвижно укрѣпленной на окружности, посредствомъ эластичной нити, не имѣющей массы. Когда длина нити равна 1, ея натяженіе равно нулю; когда ея длина равна l , натяженіе выражается формулой $k(l-1)$, гдѣ k есть положительная константа. Точка M находится на разстояніи 2 отъ точки A ; ей сообщаютъ движеніе по окружности съ относительной скоростью v_0 . Изучить относительное движеніе точки M на окружности; узнать, оставляетъ ли точка окружность въ началѣ движенія. Если этотъ случай имѣетъ мѣсто, то не нужно дальше изучать движеніе.

30. Тяжелая однородная квадратная пластинка можетъ свободно качаться вокругъ одной изъ своихъ сторонъ. Найти періодъ качаній: 1° когда разсматриваемая сторона горизонтальна и 2° когда она составляетъ съ горизонтальной плоскостью данный уголъ φ .

Численный примѣръ:

$$\varphi = 45^\circ, \quad \text{сторона квадрата} = 1 \text{ м.}, \quad g = 9,81 \text{ м.}.$$

31. Однородный блокъ, имѣющій массу M и радіусъ R , движется



Фиг. 213.

безъ тренія вокругъ горизонтальной оси, проходящей черезъ его центръ и перпендикулярной къ его плоскости.

Черезъ этотъ блокъ перекинута нить mfr , не имѣющая массы; къ концу ея m привязанъ грузъ, имѣющій массу m ; другой конецъ связанъ съ вертикальной упругой пружиной rq , которая прикрѣплена своимъ концомъ въ точкѣ q на вертикали, проходящей черезъ точку B . Пружина rq вызываетъ въ нити натяженіе T , пропорціональное удлинению $l - l_0$ пружины.

Изучить движеніе блока и движеніе груза m при слѣдующихъ начальныхъ условіяхъ: пружина обладаетъ такой длиной l_0 , которая не вызываетъ въ нити натяженія, и система находится въ покоѣ, при чемъ масса m находится на вергикали, проходящей черезъ точку A , а длина $rBfAm$ равна длинѣ нити. Вычислить натяженія T и T' во время движенія и давленіе блока на его ось.

Изслѣдовать, можетъ ли длина $mAfBr$ во время движенія сдѣлаться меньшей, чѣмъ длина всей нити, въ каковомъ случаѣ пружина перестала бы дѣйствовать въ точкѣ r . Предполагается, что нить не можетъ скользить по блоку.

32. Однородная пластинка вѣсомъ въ 20 кг., толщина которой принимается равной нулю, имѣетъ форму равносторонняго треугольника, сторона котораго равна 0,60 м.

Пластинка можетъ свободно качаться вокругъ неподвижной горизонтальной стороны BC , и въ разсматриваемый моментъ находится въ покоѣ въ вертикальной плоскости ABC .

Безконечно малый шаръ, вѣсомъ въ 1 кг., имѣющій скорость 26 м. въ секунду, перпендикулярную къ пластинкѣ, ударяетъ пластинку въ точкѣ A , послѣ чего составляетъ съ этой пластинкой одно тѣло.

Требуется опредѣлить начальную угловую скорость пластинки ABC вокругъ оси BC .

33. Однородная прямолинейная трубка, діаметромъ и толщиной которой можно пренебречь, имѣетъ длину $2l$ и массу m . Въ этой трубкѣ движется безконечно тонкій однородный стержень такой же длины и массы.

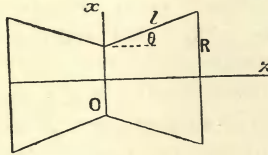
Трубка и стержень имѣютъ вѣсъ; центръ тяжести G трубки и центръ тяжести G' стержня взаимно притягиваются съ силой, пропорціональной ихъ разстоянію; сила притяженія на разстояніи единицы равна $\frac{1}{2} mk^2$. Система, кромѣ того, должна двигаться въ неподвижной вертикальной плоскости P . Связи безъ тренія.

Изучить движеніе системы. Въ качествѣ параметровъ берутъ: координаты x, y центра тяжести G' системы относительно неподвижныхъ осей Ox, Oy , проведенныхъ въ плоскости P (ось Oy направлена вертикально вверхъ); разстояніе $\rho = GG'$ и уголъ θ прямой GG' съ осью Ox .

34. Твердый однородный желѣзный листъ безконечно малой толщины имѣетъ форму наружной поверхности тѣла, состоящаго изъ двухъ равныхъ усѣченныхъ конусовъ, соединенныхъ своими малыми основаніями.

Масса единицы поверхности равна μ , радіусъ большаго основанія — R , длины аподемъ равны l и половина угла при вершинѣ равна θ .

1° Определить моменты инерции составленного такимъ образомъ тѣла, т. е. моментъ инерции C вокругъ оси вращения и моментъ A вокругъ перпендикулярной оси, проходящей черезъ центръ тяжести.



Фиг. 214.

2° Приложить рѣшеніе къ частному случаю: $l = R$, $\theta = 30^\circ$.

3° Разсматриваемое тѣло, обладая вращательнымъ движеніемъ съ угловой скоростью ω вокругъ своей оси вращения (предполагая, что она горизонтальна) и поступательнымъ движеніемъ со скоростью V , направленной по вертикали внизъ, получаетъ въ самой низкой точкѣ одного изъ большихъ оснований ударъ напряженія P , нормальный къ соответствующему конусу и направленный въ сторону оси. Определить состояніе скоростей непосредственно послѣ удара.

(При рѣшеніи этого вопроса обозначаютъ черезъ M массу тѣла и черезъ A и C его моменты инерции и не подставляютъ вмѣсто A и C ихъ значеній.)

4° Приложить найденный результатъ къ даннымъ въ п. 2°, полагая, кромѣ того: $V = \frac{R\omega}{100}$ и $P = MV$.

35. Тяжелая однородная пластинка, имѣющая форму прямоугольника, движется вокругъ прямой (d), проведенной въ этой пластинкѣ черезъ ея центръ тяжести C параллельно бѣльшей сторонѣ прямоугольника. Этой прямой (d), которая должна все время оставаться горизонтальной, сообщаютъ равномерное вращательное движеніе вокругъ вертикальной оси, проведенной черезъ точку C .

Къ одному изъ концовъ прямой (d'), проведенной въ пластинкѣ черезъ точку C параллельно меньшей сторонѣ прямоугольника, припаяно малое тяжелое тѣло массы m , которое здѣсь можно разсматривать, какъ материальную точку.

Въ начальный моментъ полупрямая, идущая отъ точки C къ m , составляетъ уголъ въ 30° съ линіей надира, проведенной черезъ точку C , и не имѣетъ начальной скорости.

Плотность пластинки 7,7; стороны прямоугольника равны 20 см. и 10 см., толщина пластинки 1 мм., ея масса 7 г., прямая (d) дѣлаетъ полный оборотъ вокругъ точки C за полсекунды.

Изучить движеніе пластинки вокругъ прямой (d); вычислить въ частности продолжительность качанія и крайнія значенія угла прямой (d') съ линіей надира, проведенной черезъ точку C .

36. Основаніемъ однороднаго прямоугольнаго параллелоипеда служить квадратъ, сторона котораго равна 1 м.; высота параллелоипеда равна 1 дм. Определить точки пространства, для которыхъ эллипсоидомъ инерціи этого параллелоипеда служить сфера.

37. Однородный невѣсомый конусъ вращенія прикрѣпленъ своей вершиной въ точкѣ O и можетъ вращаться вокругъ этой точки. Всѣ точки конуса притягиваются къ неподвижной точкѣ A съ силой, пропорціональной ихъ разстоянію отъ этой точки. Требуется:

1° определить моменты инерціи конуса около его вершины;

2° изучить всѣ обстоятельства движенія этого конуса;

3° указать частные случаи, когда уравненіе движенія можно интегрировать при помощи элементарныхъ функцій;

4° указать, каковы должны быть начальныя данныя для того, чтобы ось конуса описывала конусъ вращенія вокругъ оси OA .

Положеніе твердаго тѣла опредѣляется Эйлеровыми углами θ, φ, ψ , фиксирующими положеніе подвижнаго трехграннаго угла $Ox\eta z$, связаннаго съ конусомъ, относительно неизмѣннаго трехграннаго угла $OXYZ$; Oz есть ось конуса, а Ox и Oy — двѣ взаимно перпендикулярныя оси, лежащія въ плоскости экватора; ось OZ совпадаетъ съ прямой OA . Даны: радіусъ основанія R и высота H конуса, его плотность ρ , разстояніе $OA = a$, разстояніе $OG = b$ центра тяжести отъ вершины, начальныя значенія $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0$. Разсмотреть случай, когда $R = 2H$.

38. Въ сферическомъ маятникѣ, который имѣетъ въ длину 1 метръ, начальное положеніе тяжелой точки — на параллельномъ кругѣ, лежащемъ ниже центра на разстояніи $\frac{\sqrt{3}}{2}$ м. Начальная скорость направлена по касательной къ параллели и равна 20 м. въ секунду.

Требуется опредѣлить параллели, ограничивающія траекторію конца маятника; $g = 9,81$ м.

39. Въ горизонтальной плоскости даны двѣ массы m и m' , связанныя нитью, которая имѣетъ постоянную длину и можетъ свободно скользить сквозь кольцо, находящееся въ неподвижной точкѣ O . Массамъ m и m' сообщаютъ какія-нибудь начальныя скорости въ плоскости Om' ; требуется изучить движеніе системы.

1° Составить формулы, опредѣляющія траекторіи двухъ точекъ.

2° Указать случаи, въ которыхъ интегрированія могутъ быть выполнены посредствомъ элементарныхъ функцій.

3° Вычислить натяженіе нити.

4° Изслѣдовать задачу для случая, когда лишь одна изъ двухъ массъ получаетъ начальный импульсъ, а другая масса вначалѣ находится въ покоѣ.

Треніе, а также масса нити, не принимаются въ расчетъ; предполагается, что нить совершенно гибка и нерастяжима.

40. Съ двумя неподвижными точками A и B , лежащими на одной горизонтальной прямой на разстояніи a одна отъ другой, сочленены концы

двухъ однородныхъ тождественныхъ стержней AC , BD , имѣющихъ длину a и вѣсъ P . Концы C и D этихъ двухъ стержней сочленены съ концами трубки CD , имѣющей длину a и вѣсъ P ; внутри ея можетъ скользить безъ тренія тяжелая точка E , имѣющая вѣсъ P .

Вся система первоначально не имѣетъ скорости, и стержни AC , BD составляютъ съ вертикалью уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{3}{4}$.

Система предоставлена самой себѣ; требуется опредѣлить, каковъ долженъ быть коэффициентъ тренія точки E въ трубкѣ CD для того, чтобы эта точка не перемѣщалась въ трубкѣ.

41. Двѣ матеріальныя точки M и M' , массы которыхъ равны единицѣ, связаны нерастяжимой невѣсомой нитью данной длины. Точка M должна скользить безъ тренія по неподвижной прямой, наклоненной къ горизонту. Обѣ точки находятся въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ эту неподвижную прямую, и предоставлены безъ начальныхъ скоростей дѣйствующимъ на нихъ силамъ.

Найти ихъ движеніе; рассмотреть, остается ли нить натянутой.

42. Безконечно тонкій и однородный круговой дискъ A , который можетъ двигаться около неподвижной точки O , лежащей на его окружности, находится въ покоѣ. Второй круговой дискъ B , безконечно тонкій и однородный, имѣетъ массу, въ три раза большую, чѣмъ первый, и обладаетъ равномернымъ поступательнымъ движеніемъ въ плоскости диска A параллельно его диаметру OC . Оба диска совершенно упруги.

Можно ли выбрать точку, въ которой дискъ B ударялъ бы въ дискъ A такимъ образомъ, чтобы послѣ удара скорость центра диска B была перпендикулярна диаметру OC .

43. Тяжелая однородная круговая доска, радіусъ которой 1 м., а вѣсъ 1 кг., первоначально находится въ покоѣ; она можетъ вращаться безъ тренія около своего центра O въ горизонтальной плоскости, на которой она лежитъ. Насѣкомое M вѣсомъ въ 1 г. движется по краю этой доски. Оно выходитъ изъ состоянія покоя и въ теченіе 10 секундъ движется такимъ образомъ, что проекція силы, приложенной имъ къ доскѣ, на касательную къ краю все время равна 3 г. По истеченіи этого времени насѣкомое движется такимъ образомъ, что работа силы, приложенной имъ къ доскѣ, пропорціональна времени. Опредѣлить движеніе доски, движеніе насѣкомаго по доскѣ и абсолютное движеніе насѣкомаго; $g = 9,81$.

44. Тяжелый однородный эллиптическій дискъ, полуоси котораго равны 2 м. и 1 м., а вѣсъ 1 кг., покоится на двухъ очень тонкихъ стержняхъ, нормально его пронизывающихъ; эти стержни занимаютъ горизонтальное положеніе и пронизываютъ большую ось на разстояніи 1,5 м. отъ центра; они лежатъ на одномъ уровнѣ. Внезапно устраняютъ одинъ изъ стержней; требуется найти реакцію другого стержня въ моментъ, когда дискъ приходитъ въ движеніе.

45. Тяжелый твердый стержень AB перемѣщается въ вертикальной плоскости такимъ образомъ, что его концы A и B скользятъ безъ тренія по двумъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ Ox и Oy . Этотъ стержень утончается по направленію къ концу A такимъ образомъ, что линейная плотность стержня въ точкѣ P пропорціональна разстоянію PA .

1° Найти и изслѣдовать движеніе стержня AB :

масса стержня $AB = M$,

$AB = 2l$,

уголъ оси Ox съ вертикальной линіей, направленной внизъ, равенъ φ ,

уголъ оси Ox съ прямой OC (C есть середина стержня AB) равенъ θ .

2° Найти точку D стержня и массу M_1 подъ условіемъ, чтобы при любыхъ начальныхъ условіяхъ живая сила стержня постоянно имѣла такую величину, какую имѣла бы при движеніи точка D , если бы ея масса была равна M_1 . Показать, что движеніе точки D такое же, какое получила бы матеріальная точка, которая должна была бы скользить безъ тренія по траекторіи точки D , находясь въ постоянномъ полѣ C_1 , напряженіе и направленіе котораго нужно опредѣлить.

3° Опредѣлить и построить положенія равновѣсія стержня AB . Зная эти положенія, можно ли построить направленіе поля C_1 ?

46. Однородное твердое тѣло имѣетъ форму треугольной призмы $ABC_1A_1B_1C_1$; найти моменты инерціи этого твердаго тѣла вокругъ его девяти реберъ.

47. Въ неподвижной вертикальной плоскости P находятся два равныхъ, однородныхъ, прямолинейныхъ стержня AB и CD , имѣющіе одинаковую массу и сочлененные въ своей серединѣ G . Ихъ концы A и C должны оставаться на неподвижной прямой Ox . Связи безъ тренія.

1° Опредѣлить движеніе системы.

2° Вычислить реакціи оси Ox на концы A и C .

3° Опредѣлить реакцію на стержень AB въ точкѣ G .

Предполагается, что въ начальный моментъ точка G лежитъ на перпендикулярѣ Oy къ оси Ox , проведенномъ подъ нею черезъ точку O , и что система вначалѣ находится въ покоѣ.

Длина стержней пусть будетъ $2l$, ихъ масса m ; уголъ вертикали, направленной внизъ, съ осью Ox назовемъ черезъ α , черезъ x — абсциссу точки G и черезъ θ — уголъ прямой AB съ осью Ox .

Замѣчаніе. — Допускается, что въ случаѣ, если стержни встрѣчаются, они могутъ пройти одинъ черезъ другой такимъ образомъ, что движеніе продолжается безъ удара.

48. Однородное твердое тѣло S массы M ограничено извнѣ цилиндромъ вращенія, имѣющимъ высоту h и радіусъ R . O есть точка одного изъ основаній, лежащая на разстояніи d ($d < R$) отъ оси вращенія, а Ox , Oy , Oz три взаимно перпендикулярныя оси; ось Oz параллельна образующимъ цилиндра, а ось Ox пересѣкаетъ ось вращенія.

1° Составить уравнение эллипсоида инерции тѣла S для точки O .

2° Пусть O' будетъ точка, въ которой ось Oz пересѣкаетъ второе основаніе; предполагается, что точки O и O' неподвижны и лежатъ на одной вертикальной прямой, а что тѣло S равномерно вращается вокругъ оси OO' съ угловой скоростью ω ; опредѣлить реакции точекъ O и O' .

3° Къ тѣлу, движущемуся указаннымъ образомъ, въ данный моментъ прилагаютъ, не измѣняя связей, двѣ пары, — сопротивленія Γ , Γ' , моменты которыхъ параллельны оси Oz ; напряженіе одного изъ сопротивленій равно N , а напряженіе другого пропорціонально угловой скорости вращенія; коэффициентъ пропорціональности равенъ α . Вычислить N и α такимъ образомъ, чтобы угловая скорость по истеченіи времени t_1 ($\varepsilon < 1$) была равна $\omega\varepsilon$ и чтобы движеніе прекратилось по истеченіи времени $2t_1$.

49. Стержень BC сочлененъ на своихъ концахъ съ двумя одинаковыми стержнями BA и CD . Эти три тяжелыхъ и однородныхъ стержня лежатъ на горизонтальной плоскости, по которой они могутъ скользить безъ тренія.

Вначалѣ стержни AB и CD перпендикулярны къ стержню BC и направлены въ противоположныя стороны, при чемъ система находится въ покоѣ. Затѣмъ къ двумъ свободнымъ концамъ A и D прилагаютъ два данныхъ удара, составляющихъ пару.

1° Вычислить удары реакции, происходящіе въ точкахъ сочлененій B и C и опредѣлить распредѣленіе скоростей, сообщаемыхъ стержнямъ этими ударами.

2° Изучить движеніе стержней.

50. Ребра тяжелаго и однороднаго прямоугольнаго параллелоипеда соотвѣтственно равны: $OA = 3$ м., $OB = 2$ м., $OC = 1$ м. Параллелоипедъ можетъ вращаться вокругъ неподвижнаго горизонтальнаго ребра OB . Вначалѣ ребро OC направлено по вертикальной прямой внизъ, и тѣло представляется самому себѣ безъ начальной скорости.

Вычислить:

1° длину синхронистическаго математическаго маятника;

2° продолжительность качанія;

3° время, необходимое для того, чтобы плоскость AOB стала вертикальной;

4° угловую скорость въ этомъ послѣднемъ положеніи.

51. Твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку O , представляетъ собою стержень OA , перпендикулярно къ которому прикрѣпленъ тяжелый и однородный дискъ, имѣющій центръ въ точкѣ A .

Массу стержня OA считаютъ равной нулю. Разстояніе OA равно половинѣ радіуса R диска. Найти движеніе этой системы, зная, что вначалѣ дискъ вращается вокругъ прямой OA съ угловой скоростью, равной $\sqrt{\frac{2g}{R}}$,

а стержень, который вначалѣ занималъ горизонтальное положеніе, былъ пущенъ съ угловой скоростью, которая также равна $\sqrt{\frac{2g}{R}}$.

Для удобства вычисленія нужно положить:

$$\frac{2g}{R} = \omega^2.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что эллипсоидъ инерціи для точки O приводится къ сферѣ, такъ что

$$A = B = C = \frac{1}{2} MR^2.$$

52. Однородное и тяжелое бесконечно тонкое полое полушаріе скользить безъ тренія на неподвижной горизонтальной плоскости. Изучить его движеніе, предполагая, что въ начальный моментъ уголъ, образуемый осью симметріи тѣла съ прямой, направленной вертикально вверхъ, равенъ 30° , и что въ этотъ же моментъ тѣло обладаетъ вращательнымъ движеніемъ вкругъ вертикальной прямой, проходящей черезъ его центръ тяжести.

Радіусъ полушарія и его плотность равны единицѣ.

53. Бесконечно тонкая круговая твердая нить укрѣплена на вертикальной плоскости. Изъ точки A нити пускаютъ безъ скорости тяжелую точку M .

Эта точка падаетъ по вертикальной прямой, проходящей черезъ точку A , ударяетъ нить въ точкѣ B , затѣмъ въ точкѣ C и т. д. Нить и точка совершенно упруги.

Можно ли выбрать точку A такимъ образомъ, чтобы точка C была ей диаметрально противоположна на нити? Если это условіе осуществлено, то каково будетъ движеніе точки M ?

54. Два однородныхъ и тяжелыхъ одинаковыхъ колеса, имѣющія массу M и радиусъ R , свободно вращаются около своихъ центровъ C и C_1 , соединенныхъ двумя однородными и тяжелыми одинаковыми стержнями CA и C_1A , имѣющими массу m , длину $2l$ и сочлененными въ точкѣ A . Система предоставлена самой себѣ въ вертикальной плоскости xOy , обладая скоростями, направленія коихъ содержатся въ этой плоскости, при чемъ оба колеса опираются на неподвижную наклонную прямую Ox , совершенно гладкую.

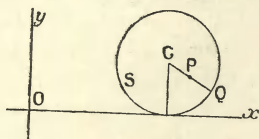
1° Вычислить движеніе системы, допуская, что оба колеса остаются въ соприкосновеніи съ прямой Ox .

2° Если каждое колесо можетъ приподыматься выше прямой Ox , то какому ограниченію должны быть подчинены начальныя условія для того, чтобы оба колеса оставались въ соприкосновеніи съ прямой Ox ?

3° Вычислить движеніе той же самой системы, отбросивъ предположеніе, что ось Ox совершенно гладкая, но принявъ, что оба колеса должны катиться безъ скольженія по оси Ox . При разработкѣ этого третьяго вопроса допускаютъ, что колеса остаются въ соприкосновеніи съ прямой Ox .

Замѣчаніе.—Въ качествѣ параметровъ можно принять абсциссу середины прямой CC_1 , уголъ $\theta = \frac{\widehat{CAC_1}}{2}$ и углы, на которые поворачиваются оба колеса.

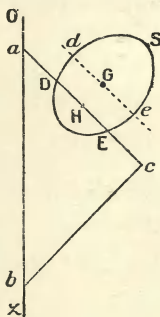
55. Тяжелый и однородный, массивный круговой дискъ S , радіусъ котораго равенъ 10 см. и масса котораго равна m , несетъ въ серединѣ одного изъ своихъ радіусовъ CQ массу P , равную m и неизмѣнно съ нимъ связанную. Твердое тѣло S предоставлено самому себѣ безъ начальной скорости въ вертикальной плоскости xOy и опирается на совершенно гладкую, неподвижную, горизонтальную прямую Ox . Уголъ прямой CP въ начальномъ положеніи съ вертикальной прямой, направленной внизъ, равенъ $7^\circ 30'$; вы-



Фиг. 215.

числить малыя движенія тѣла S , разсматривая этотъ уголъ, какъ безконечно малый. Определить въ частности періодъ качаній прямой CP около точки C (фиг. 215).

56. Въ прямоугольномъ и равнобедренномъ треугольникѣ abc , составленномъ изъ трехъ тяжелыхъ, однородныхъ стержней одинаковой плотности, концы a и b гипотенузы прикрѣплены неподвижно на одной вертикали Oz .



Фиг. 216.

Треугольникъ abc свободно вращается вокругъ этой неподвижной оси Oz , и въ то же время однородное тяжелое тѣло S , прикрѣпленное въ двухъ точкахъ D и E къ стержню ac , параллельному оси ed тѣла S (фиг. 216), свободно вращается вокругъ этого стержня ac . Проекція центра тяжести G тѣла S на катетъ ac лежитъ въ его серединѣ H .

1° Вычислить движеніе системы, предоставленной при какихъ-нибудь начальныхъ условіяхъ дѣйствию силы тяжести.

2° Найти движение системы в частномъ случаѣ, когда точка G совпадаетъ съ точкой H и точки D , E совпадаютъ соответственно съ серединами отрезковъ aH и cH . Определить реакции на тѣло S въ точкахъ D и E и на треугольникъ abc въ точкахъ a и b .

Замѣчаніе. — Положеніе системы можетъ быть опредѣляемо угломъ α плоскости abc съ неподвижной плоскостью zOx и угломъ β плоскости abc съ плоскостью acG . M — масса треугольника abc , l — длина ac , μ — масса тѣла S , λ — разстояніе GH , C — моментъ инерции тѣла S вокругъ его оси, указанной на фигурѣ, и A — моментъ инерции вокругъ оси GH .

57. Тяжелая, однородная, совершенно гибкая штора бесконечно малой толщины имѣетъ форму прямоугольника. Верхній край шторы прикрѣпленъ по горизонтальной прямой къ вертикальной стѣнѣ; нижній край примыкаетъ къ поверхности однороднаго и тяжелаго цилиндра вращенія съ горизонтальной осью; штора навертывается на этотъ цилиндръ. Подъ дѣйствіемъ своего вѣса цилиндръ падаетъ, и штора развертывается, приставая вплотную къ стѣнѣ. Изучить движеніе, происходящее во время развертыванія. Предположить, что имѣется вертикальное сопротивленіе постояннаго напряженія, приложенное къ центру тяжести цилиндра.

58. Тяжелое твердое тѣло снабжено двумя параллельными осями привѣса: центръ тяжести лежитъ между обѣими осями. Когда тѣло качается подъ дѣйствіемъ силы тяжести вокругъ первой оси, оно дѣлаетъ 488 качаній въ 10 минутъ; вокругъ второй оси оно дѣлаетъ 524 качаній за этотъ же періодъ. Разстояніе между двумя осями равно 1,60 м. Вычислить разстояніе между центромъ тяжести и каждой осью, а также гираціонный радіусъ по отношенію къ оси, параллельной предыдущимъ и проведенной черезъ центръ тяжести.

59. Однородное невѣсомое твердое тѣло, масса котораго равна 35, имѣетъ форму шара радіуса R и можетъ свободно вращаться около неподвижной точки O своей поверхности. Къ центру G шара приложена сила притяженія, исходящая отъ неподвижной точки P , разстояніе которой отъ точки O равно $\dot{R}$; напряженіе этой силы равно $\frac{\mu^2}{PG^3}$, гдѣ μ есть константа.

Найти движеніе твердаго тѣла, предполагая, что вначалѣ радіусъ OG наклоненъ подъ угломъ въ 60° къ неподвижному направленію OP и что шаръ тогда имѣетъ мгновенное вращеніе вокругъ этого радіуса съ угловой скоростью, равной

$$\frac{\mu}{R^2} \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

60. Нить, не имѣющая массы, навернута на однородную окружность радіуса R , а ея свободный конецъ прикрѣпленъ къ точкѣ O горизонтальной плоскости, по которой окружность, положенная плашмя, можетъ скользить безъ тренія. Определить движеніе системы, предполагая, что нить натянута.

Движеніе разсматривается лишь въ продолженіе того періода, когда нить еще не вся развернулась.

61. Однородная матеріальная окружность, имѣющая массу M и радиусъ r , несетъ очень малое кольцо той же массы, которое можетъ скользить съ треніемъ вдоль окружности (коэффициентъ тренія: $f = \tan \alpha$).

Опредѣлить:

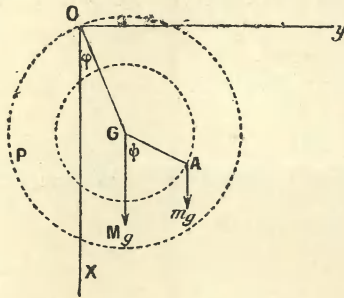
1° движеніе системы, брошенной въ вертикальной плоскости и подверженной силѣ тяжести.

2° относительное движеніе кольца и окружности.

62. Тяжелая и однородная круговая пластинка P , имѣющая массу M и радиусъ R , должна вращаться вокругъ горизонтальной неподвижной оси Oz , перпендикулярной къ плоскости пластинки въ данной точкѣ O ея окружности.

Тяжелая матеріальная точка A массы m должна оставаться внутри или на окружности (C), имѣющей радиусъ $\frac{R}{2}$ и проведенной на пластинкѣ P , центръ которой совпадаетъ съ центромъ G окружности.

Въ начальный моментъ $t=0$ система, отклоненная отъ своего положенія равновѣсія (пластинка P въ положеніи P_0 и точка A — въ A_0 на



Фиг. 217.

окружности C), предоставлена безъ начальной скорости дѣйствию своего вѣса.

Въ качествѣ параметровъ, опредѣляющихъ положеніе системы, берутъ углы φ и ψ , составляемые въ моментъ t прямыми OG и GA съ линіей надира, проведенной изъ точки O .

1° Составить дифференціальныя уравненія движенія системы, примѣняя методъ Лагранжа.

2° Составить эти же самыя уравненія, пользуясь общими теоремами.

3° Интегрировать эти уравненія, предполагая, что углы φ_0 и ψ_0 (при $t=0$) очень малы, и что (при такомъ допущеніи) въ дифференціальныяхъ уравненіяхъ отбрасываютъ члены, содержащіе квадраты или произведенія

количествъ φ , ψ , $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$. Показать, что φ и ψ будутъ вида:

$$\varphi = A \cos \alpha t + B \cos \beta t, \quad \psi = C \cos \alpha t + D \cos \beta t,$$

гдѣ A , B , C , D , α , β константы относительно t .

4° Произвести вычисленіе при $\varphi_0 = 6'$ и $\psi_0 = 15'$, т. е. выразить при этихъ значеніяхъ количества A , B , C , D , α и β черезъ g , R , M и m .

5° Указать, когда движеніе будетъ періодическимъ и вычислить періодъ для случая 4°.

6° Вычислить во всѣхъ случаяхъ посредствомъ количествъ φ , ψ и ихъ производныхъ по времени t давленіе точки A на окружность (C).

7° Вычислить это давленіе въ частныхъ случаяхъ 3° или 4° и показать, что въ этихъ случаяхъ движущаяся точка A не покидаетъ окружности (C).

63. Въ вертикальной плоскости, на неподвижной прямой Ox , составляющей съ горизонтальной плоскостью уголъ, тангенсъ котораго равенъ 0,4, помѣщена прямоугольная, тяжелая и однородная пластинка, привязанная въ точкѣ O эластичной нитью OA , массу которой считаемъ равной нулю. Эта нить удлинняется пропорціонально своему натяженію; при натяженіи, равномъ вѣсу пластинки, естественная длина a нити удвоится.

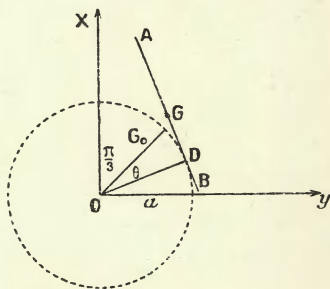
Коэффициентъ тренія равенъ 0,1.

Первоначально система не имѣетъ скорости, а нить находится въ естественномъ состояніи.

Найти движеніе системы.

Каково должно быть отношеніе основанія къ высотѣ для того, чтобы система не качалась.

64. Пусть AB будетъ тяжелый стержень длины l , плотность котораго возрастаетъ отъ A къ B слѣдующимъ образомъ: если ϵ_0 есть плотность



Фиг. 218.

въ точкѣ A , то плотность въ какой-нибудь точкѣ на разстояніи ρ отъ точки A равна

$$\epsilon_0 + \frac{\epsilon_0 \rho^2}{l^2}$$

Стержень AB может катиться безъ скольженія по окружности неподвижнаго вертикальнаго круга, описанной изъ центра O радіусомъ a .

1° Каковы положенія равновѣсія стержня?

2° Предположимъ, что въ начальный моментъ точка, въ которой стержень касается окружности, совпадаетъ съ центромъ тяжести G_0 стержня, и что стержень вращается около точки G_0 съ начальной угловою скоростью, равной

$$k \frac{\sqrt{ag}}{l},$$

гдѣ k есть положительная постоянная и g —постоянная силы тяжести.

Требуется составить дифференціальное уравненіе движенія стержня, примѣняя методъ Лагранжа.

Если D есть точка касанія стержня въ какой-нибудь моментъ t , то въ качествѣ параметра, опредѣляющаго положеніе стержня въ этотъ моментъ, служить уголъ

$$\theta = \sphericalangle (OG_0, OD),$$

при этомъ предполагается, что

$$\sphericalangle (OX, OG_0) = \frac{\pi}{3}.$$

3° Требуется написать дифференціальное уравненіе движенія стержня, примѣняя теорему живыхъ силъ.

4° Изслѣдовать движеніе при всякомъ данномъ положительномъ значеніи постоянной k . Можетъ ли стержень занять вертикальное положеніе?

5° Вычислить давленіе стержня на окружность.

65. Тяжелый и однородный круговой дискъ прикрѣпленъ своимъ центромъ G къ концу однороднаго тяжелаго стержня, другой конецъ котораго O неподвиженъ. Стержень можетъ вращаться около точки O , а дискъ вокругъ точки G ; вся система постоянно остается въ вертикальной плоскости.

Масса диска равна M , радіусъ диска $a\sqrt{2}$, масса стержня $3M$, длина стержня $2a$; предполагается, что ускореніе силы тяжести $g=5a$.

Въ начальный моментъ стержень занимаетъ горизонтальное положеніе и не имѣетъ скорости, а дискъ вращается съ угловою скоростью ω_0 .

Найти движеніе системы. Указать, какъ вычисляются реакціи въ точкахъ O и G .

Въ моментъ, когда стержень проходитъ черезъ вертикаль, дискъ внезапно соединяется неизмѣняемымъ образомъ со стержнемъ посредствомъ новой связи. Найти новое движеніе, получаемое стержнемъ, и указать значенія скорости ω_0 , при которыхъ это движеніе становится вращательнымъ или колебательнымъ, или же совершенно пріостанавливается.

66. Движеніе полносвязной системы опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\cos x - a) \sin x \quad (a \neq 0);$$

найти положения устойчиваго равновѣсія и продолжительность малыхъ колебаній около этихъ положеній въ зависимости отъ различныхъ значеній числа a .

67. Однородная пластинка имѣетъ форму прямоугольнаго треугольника AOB (уголъ O прямой, $OA = a$, $OB = b$). Черезъ вершину O проведена прямая, параллельная гипотенузѣ. Определить на этой прямой точку M , для которой она служить главной осью инерціи, и вычислить главные моменты для этой точки.

68. Найти движеніе однородной пластинки въ вертикальной плоскости yOx , если всѣ элементы пластинки находятся подъ дѣйствіемъ своего вѣса и силы отталкиванія, пропорціональной разстоянію, отдѣляющему каждый элементъ отъ неподвижной вертикальной оси Oy .

69. Безконечно тонкій, однородный и тяжелый стержень, имѣющій длину $2d$ и плотность 1, подвѣшенъ въ неподвижной точкѣ O однимъ своимъ концомъ A посредствомъ нити, массу которой можно считать равной нулю и длина которой равна l .

1° Найти уравненія, опредѣляющія малыя движенія системы вблизи положенія устойчиваго равновѣсія, если стержень остается въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точку O .

2° Определить явно эти малыя колебанія при

$$l = 2a, \quad d = a\sqrt{6},$$

гдѣ a есть разстояніе точки прикрѣпленія A отъ центра тяжести G стержня

Можетъ ли эта система служить для измѣренія времени, и какія соотношенія существуютъ между нею и математическимъ маятникомъ, имѣющимъ длину $a = AG$.

3° Предположивъ, что точка A совпадаетъ съ центромъ G , определить въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ точку O , движенія, для которыхъ нить остается вблизи вертикали.

Существуютъ ли въ этомъ случаѣ положенія устойчиваго равновѣсія?

Обозначивъ черезъ θ уголъ нити съ прямой, направленной вертикально внизъ, и черезъ φ уголъ прямой AG съ той же вертикалью, можно вычислить живую силу при помощи теоремы Кёнига.

70. Однородная и тяжелая прямоугольная пластинка $ABCD$ безконечно малой толщины можетъ свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси Ox , совпадающей со стороною AB .

Ось Ox неподвижно связана съ тяжелымъ твердымъ тѣломъ S , которое можетъ свободно вращаться вокругъ неподвижной оси Oz_1 , пересѣкающей ось Ox въ точкѣ O , серединѣ стороны AB .

1° Предполагая, что связи безъ тренія, изучить движеніе системы при произвольныхъ начальныхъ условіяхъ,

Указать, будетъ ли движеніе пластинки вокругъ оси Ox колебательнымъ или вращательнымъ.

2° Определить, при какихъ частныхъ условіяхъ пластинка во все время движенія составляетъ съ вертикальной прямой постоянный уголъ. Вычислить этотъ уголъ и узнать, будетъ ли соответствующее движеніе устойчивымъ или неустойчивымъ.

Черезъ φ обозначаютъ уголъ, на который повернется тѣло S вокругъ прямой Oz_1 , направленной вертикально вверхъ, и черезъ θ —уголъ плоскости пластинки съ этой же вертикалью.

71. Однородный и тяжелый стержень AB , имѣющій длину $2a$, долженъ двигаться такъ, чтобы одинъ его конецъ A оставался въ данной неподвижной горизонтальной плоскости $O\xi\eta$, тогда какъ другой конецъ B не оставляетъ данной неподвижной вертикальной прямой $O\xi$. Каждый элементъ стержня AB отталкивается точкой O съ силой, пропорціональной его разстоянію отъ этой точки.

Дано начальное положеніе и начальное состояніе скоростей стержня. Изучить движеніе этого стержня.

72. Твердое тѣло можетъ вращаться вокругъ вертикальной оси Oz . Въ этомъ тѣлѣ выдолбленъ вертикальный круговой каналъ, ось котораго есть окружность съ центромъ въ точкѣ A ; плоскость оси канала перпендикулярна къ плоскости AOz . Въ этомъ каналѣ можетъ двигаться тяжелая точка P , имѣющая массу m .

Разстояніе точки A отъ оси Oz равно радіусу R канала, и моментъ инерціи J тѣла вокругъ оси Oz равенъ $2mR^2$.

Первоначально система находится въ покоѣ, и точка P лежитъ на концѣ горизонтальнаго діаметра канала.

Найти движеніе этой системы. Вычислить въ градусахъ амплитуду перемѣщенія твердаго тѣла.

73. При движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки O , въ моментъ t , мгновенная скорость вращенія есть векторъ $O\Omega$, а результирующій кинетическій моментъ около точки O есть векторъ $O\sigma$.

1° Моментъ $O\sigma$ перпендикуляренъ къ плоскости, сопряженной съ хордами, параллельными вектору $O\Omega$, относительно эллипсоида инерціи для точки O .

2° Если векторъ $O\Omega$ сохраняетъ постоянное значеніе, то результирующій моментъ около точки O силъ инерціи измѣняется удвоенной площадью треугольника $O\Omega\sigma$.

3° Въ общемъ случаѣ кинетическая энергія тѣла выражается произведеніемъ $O\Omega \cdot O\sigma \cos \angle O\Omega\sigma$.

4° Если тѣло свободно отъ дѣйствія какихъ бы то ни было данныхъ силъ, то точка Ω перемѣщается по направленію, сопряженному съ плоскостью $O\Omega\sigma$ относительно эллипсоида инерціи.

5° Вычисливъ результирующій кинетическій моментъ около любой прямой OL , направляющіе косинусы которой равны α, β, γ , предположить, что

ось OL въ моментъ t внезапно становится неподвижной, и опредѣлить новую угловую скорость вокругъ оси OL , а также потерю живой силы.

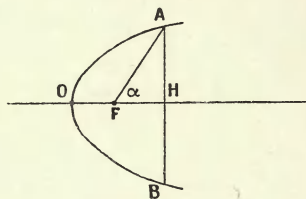
74. Прямой круговой цилиндръ, радіусъ котораго равенъ 1 дм., а высота 2 дм., ограниченъ полушаріемъ такого же радіуса и можетъ колебаться вокругъ одного изъ діаметровъ своего плоскаго основанія; діаметръ этотъ укрѣпленъ въ горизонтальномъ положеніи. Вещество, изъ котораго состоитъ цилиндръ, однородно и имѣетъ плотность 1. Ось тѣла, отклоненная отъ прямой, направленной вертикально внизъ, на уголъ въ 60° , предоставлена самой себѣ безъ скорости. По истеченіи какого времени ось въ первый разъ будетъ составлять съ этой вертикалью уголъ въ 30° ?

VI. — ПРИТЯЖЕНІЕ. ГИДРОСТАТИКА. ГИДРОДИНАМИКА.

1. Круговой секторъ вращается вокругъ одного изъ своихъ крайнихъ радіусовъ. Вычислить Ньютоново притяженіе, производимое однороднымъ тѣломъ вращенія на его вершину, если данъ радіусъ сектора, центральный уголъ и плотность.

2. Вычислить Ньютоново притяженіе, производимое однороднымъ твердымъ тѣломъ, которое ограничено параболоидомъ вращенія и плоскостью, перпендикулярной къ оси, на матеріальную точку, лежащую въ фокусѣ образующей параболы.

Пусть AB будетъ слѣдъ сѣкущей плоскости, ограничивающей сег-



Фиг. 219.

ментъ (параболоида). Данъ параметръ p образующей параболы, уголъ $AFH = \alpha$, плотность параболоида ρ и коэффициентъ притяженія μ .

При какомъ значеніи угла α притяженіе, производимое сегментомъ на фокусъ, равно нулю?

3. Данъ однородный невѣсомый шаръ радіуса a ; каждый элементъ шара притягивается неподвижной точкой P по закону Ньютона; притяженіе единицы массы на разстояніи единицы равно $\frac{11}{5} a^3 \omega^2 \sqrt{2}$; ω есть константа. Центръ S шара соединенъ съ неподвижной точкой O прямымъ безконечно тонкимъ стержнемъ, имѣющимъ длину $2a$ и идущимъ въ безконечно узкомъ каналѣ, выдолбленномъ вдоль радіуса шара; стержень OS можетъ свободно вращаться около точки O , а шаръ — вокругъ стержня OS ;

расстояние OP равно $2a$. Въ начальный моментъ уголъ POS — прямой, прямая OS вращается вокругъ прямой OP со скоростью ω , а шаръ вращается вокругъ OS со скоростью 11ω . Найти первые интегралы движенія шара; показать, какова была бы форма траекторіи точки S , если бы насъ не интересовала встреча сферы съ точкой P .

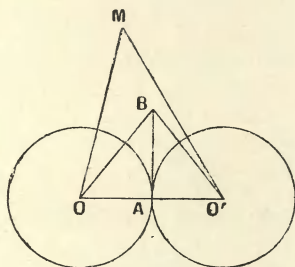
4. Пользуясь системой единиц $C. G. S.$, разсматриваютъ два одинаковыхъ однородныхъ матеріальныхъ шара, которые касаются другъ друга въ точкѣ A ; ихъ радіусъ равенъ 1 см., а плотность ρ такова, что Ньютоново притяженіе, производимое каждымъ изъ нихъ на точку, имѣющую массу 1 и лежащую на его поверхности, равно одной динѣ.

1° Вычислить Ньютоново притяженіе, оказываемое совокупностью обоихъ шаровъ: 1) на точку, имѣющую массу 1 и лежащую въ точкѣ B на одинаковомъ разстояніи отъ центровъ O и O' обоихъ шаровъ,

$$OB = BO' = \frac{4}{3},$$

и 2) на точку массы 1 , лежащую въ центрѣ O одного изъ шаровъ.

2° Пусть r и r' будутъ разстоянія произвольной точки M отъ центровъ O и O' разсматриваемыхъ шаровъ; составить уравненіе поверхности



Фиг. 220.

уровня, сперва внѣ обоихъ шаровъ и потомъ внутри одного изъ нихъ. Изучить въ частности ту поверхность уровня, которая проходитъ черезъ точку B .

5. Вычислить вѣсъ воздуха, находящагося въ относительномъ равновѣсіи въ прямомъ цилиндрѣ, который дѣлаетъ въ секунду 500 оборотовъ вокругъ своей оси и сообщается съ атмосферой двумя отверстиями въ центрахъ основаній; высота цилиндра 1 м., а радіусъ основанія 2 м. Атмосферное давленіе равно 1 кг. на квадратный сантиметръ; вѣсъ одного литра воздуха $1,293$ г.; $g = 9,81$ м.

6. Резервуаръ ограниченъ стѣной, имѣющей 10 м. въ вышину. Толщина этой стѣны въ верхней части равна $0,50$ м. Какова должна быть толщина ея у основанія для того, чтобы она выдерживала напоръ жидкости? По-

верхность стѣны, соприкасающаяся съ водой, вертикальна, а наружная поверхность есть наклонная плоскость.

Вѣсъ кубическаго метра кладки равенъ 24000 кг.; коэффициентъ тренія равенъ $\frac{1}{2}$, а сопротивление стѣны составляетъ 4 кг. на квадратный сантиметръ.

7. Вычислить притяженіе, производимое однороднымъ прямымъ круговымъ конусомъ на точку, находящуюся въ его вершинѣ. Предположить, что притяженіе пропорціонально n -ой степени разстоянія. При какихъ значеніяхъ числа n притяженіе будетъ конечнымъ или бесконечнымъ?

Частный случай, когда притяженіе происходитъ по закону Ньютона. Дана высота конуса h , уголъ при вершинѣ 2α и плотность ρ .

Вообще, предполагая, что притяженіе, производимое какимъ-нибудь тѣломъ на одну изъ его точекъ, пропорціонально n -ой степени разстоянія, опредѣлить, при какихъ значеніяхъ показателя n притяженіе будетъ конечнымъ или бесконечно большимъ. Предполагается, что поверхность, ограничивающая тѣло, такова, что радіусы-векторы, проведенные изъ притягиваемой точки, встрѣчаютъ эту поверхность только въ одной точкѣ.

8. Половина эллипса погружена въ жидкость. Бѣлая ось, ограничивающая собой эту фигуру, горизонтальна и лежитъ въ плоскости нулевого давленія. Жидкость доходитъ до этой плоскости и граничитъ съ пустотой.

1°-Опредѣлить центръ давленія этого полуэллипса.

2° Найти длину математическаго маятника, синхронистическаго съ физическимъ, который получится при качаніи полуэллипса (предполагая, что онъ однороденъ) вокругъ его горизонтальной оси; допускается, что эта ось неподвижна и что качанія происходятъ въ пустотѣ.

9. Вычислить давленіе воды на ворота вертикальнаго и прямоугольнаго шлюза, предполагая, что со стороны истока уровень воды достигаетъ верхняго края AB шлюза, а со стороны устья — нижняго края DC . Опредѣлить положеніе центра давленія. Давленіе дано въ килограммахъ для случая, когда $AB=3$ м. и $AD=4$ м.

10. Сосудъ, открытый сверху, имѣетъ форму четверти шара. Этотъ сосудъ ограниченъ спереди частью сферической поверхности съ центромъ въ точкѣ O и радіусомъ, равнымъ 0,25 м., сзади — плоской стѣнкой въ видѣ вертикальнаго полукруга, а сверху полуокружностью большаго горизонтальнаго круга. Этотъ сосудъ наполненъ до краевъ водой.

1° Вычислить въ динахъ результирующую давленій воды на весь сосудъ.

2° Вычислить въ тѣхъ же единицахъ результирующую давленій воды на вертикальную стѣнку.

3° Опредѣлить величину и направленіе результирующей давленій воды на сферическую стѣнку.

Дѣйствіе атмосфернаго давленія на свободную поверхность воды и на наружную поверхность сосуда не принимается въ расчетъ.

11. Масса газа, вѣсящая 10 г. и находящаяся въ изотермическомъ равновѣсіи, заключена въ эллипсоидъ вращенія, ось котораго вертикальна и имѣетъ въ длину 40 см. и экваторъ котораго имѣетъ радіусъ, равный 10 см. Допускають, что въ каждой точкѣ плотность газа равна давленію, измѣренному въ единицахъ *C. G. S.*

Доказать, что давленія газа на стѣнки (предполагая, что онѣ твердыя) половины эллипсоида, лежащаго ниже плоскости экватора, приводятся лишь къ результирующей, и вычислить эту результирующую въ динахъ. Ускореніе *g* силы тяжести считается равнымъ 980.

12. Эллипсоидъ, имѣющій въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіе

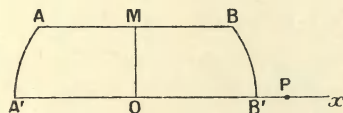
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 4a^2,$$

наполненъ однородной массой *S*, которая обладаетъ способностью притягивать по закону Ньютона; вычислить притяженіе *Z*, испытываемое точкой *M*, лежащей на оси *z*-овъ внутри эллипсоида. Определить движеніе, которое получила бы эта точка, находящаяся вначалѣ въ покоѣ, если бы масса *S* была жидкой и оказывала движенію точки *M* лишь слабое сопротивленіе, пропорціональное скорости.

13. Вертикальный кругъ погруженъ въ тяжелую однородную жидкость, поверхность которой не испытываетъ никакого давленія; двѣ трети поверхности круга находятся въ жидкости; определить разстояніе центра давленія отъ свободной поверхности жидкости.

Радіусъ круга = 0,12 м.

14. Дано тѣло вращенія *S*, меридіанъ котораго состоитъ изъ двухъ дугъ *AA'*, *BB'* окружностей и прямолинейнаго отрѣзка *AB*, который параллеленъ оси вращенія *Ox*, при чемъ проекціей середины *M* отрѣзка *AB* на ось *Ox* служить центръ обѣихъ дугъ. Разстояніе *OM* или *l* равно половинѣ отрѣзка *AB*.



Фиг. 221.

Предполагая, что тѣло *S* — сплошное и однородное и имѣетъ плотность 1, вычислить:

1° потенциалъ ньютоновыхъ притяженій. производимыхъ тѣломъ *S* на массу *P*, равную единицѣ и лежащую на оси *Ox*, на разстояніи *x* отъ центра *O*; и

2° результирующую этихъ притяженій.

Разсмотрѣть сперва случай, когда точка *P* находится внѣ тѣла *S*, а затѣмъ случай, когда точка *P* лежитъ внутри тѣла *S*.

VII. — ЗАДАЧИ НА РАЗЛИЧНЫЯ ЧАСТИ КУРСА.

Предложены на экзаменах для получения звания адъюнктъ-профессора (Agréation).

1. Найти движение однородного тяжелого кругового блока, имѣющаго массу M , радиусъ R и бесконечно малую толщину, если онъ помѣщенъ на неподвижной твердой оси Ox , по которой онъ долженъ катиться безъ скольженія такимъ образомъ, чтобы его плоскость постоянно проходила черезъ ось.

Положительной стороною на оси Ox будемъ считать направление въ сторону наклона; уголъ оси Ox съ горизонтальной плоскостью обозначимъ черезъ α ; къ оси Ox присоединимъ неподвижную горизонтальную ось Oy и ось Oz , направленную вверхъ перпендикулярно къ плоскости xOy .

Черезъ x обозначимъ абсциссу OH точки касанія H блока съ осью Ox , θ — уголъ плоскости блока съ вертикальной плоскостью xOz . Предположимъ, что въ начальный моментъ, $t=0$, дискъ безъ начальной скорости помѣщенъ въ вертикальной плоскости xOz , на оси Ox , при чемъ точка касанія совпадаетъ съ началомъ O ($\theta=0$, $x=0$), и къ центру блока приложенъ данный ударъ, проекціи котораго на осяхъ Ox , Oy , Oz соответственно равны Ma , Mb , Mc .

Вычислить реакции оси на блокъ и опредѣлить моментъ, когда блокъ отдѣляется отъ оси Ox .

Замѣчаніе. — Предполагается, что каченіе блока по оси не встрѣчаетъ никакого сопротивленія

2. Разсматривается бесконечно тонкая, однородная, твердая, прямоугольная пластинка, центръ которой O (центръ тяжести) неподвиженъ; пластинка опирается на бесконечно малый неподвижный шаръ S , на которомъ она можетъ скользить безъ тренія; разстояніе $OS=l$ этого шара отъ центра O таково, что окружность, описанная въ плоскости пластинки изъ точки O , какъ центра, радиусомъ l , вся лежитъ въ пластинкѣ.

1° Найти движение пластинки, если начальныя условія таковы, что пластинка въ началѣ движенія скользитъ по сферѣ S .

2° Вычислить реакцію сферы S на пластинку и разсмотрѣть, можетъ ли пластинка въ какой-нибудь моментъ оставить сферу.

Пусть Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 будутъ три неподвижныя оси, проведенныя черезъ точку O , при чемъ ось Ox_1 направлена по прямой OS . Пусть далѣе Ox , Oy , Oz будутъ осями симметріи пластинки, при чемъ ось Ox параллельна большимъ сторонамъ прямоугольника, Oy — меньшимъ сторонамъ, а ось Oz направлена нормально къ пластинкѣ, въ сторону отрицательныхъ z_1 -овъ. Черезъ A , B , C обозначимъ моменты инерціи пластинки, взятые соответственно вокругъ осей Ox , Oy , Oz , черезъ θ — уголъ z_1Oz и черезъ φ уголъ x_1Ox . Равнымъ образомъ черезъ θ_0 , φ_0 , θ'_0 , φ'_0 обозначимъ данныя начальныя значенія угловъ θ , φ и ихъ производныхъ θ' , φ' по времени, пред-

полагая, что значеніе φ_0 заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; рассмотреть вопрос сперва въ предположеніи, что произведеніе $\theta'_0 \varphi'_0$ равно нулю, а затѣмъ въ предположеніи, что оно отлично отъ нуля; въ каждомъ изъ различныхъ частныхъ случаевъ, соотвѣствующихъ этимъ предположеніямъ, указать, какъ нужно выбрать начальные данныя для того, чтобы рассматриваемое движеніе имѣло мѣсто.

3. I. Тяжелое однородное тѣло вращенія подвѣшено точкой O своей оси; изучить движеніе тѣла, зная, что ось, благодаря связи (безъ тренія), должна оставаться въ плоскости P , проходящей черезъ вертикаль точки O и вращающейся вокругъ этой вертикали съ постоянной угловой скоростью ω . При какихъ условіяхъ движеніе тѣла относительно плоскости P приводится къ перманентному вращенію вокругъ его оси?

II. Безконечно тонкій однородный круговой дискъ, имѣющій массу M и радиусъ R , въ своемъ движеніи долженъ оставаться въ плоскости, въ которой проведены двѣ неподвижныя прямоугольныя оси Ox , Oy . Въ извѣстный моментъ центръ диска находится въ началѣ O ; скорость v этого центра направлена по оси Ox , и угловая скорость вращенія диска вокругъ его центра равна ω . Въ тотъ же моментъ при помощи связи (безъ тренія) дѣлаютъ неподвижной точку A диска, опредѣляемую координатами $OA = \varrho$, $\widehat{xOA} = \alpha$. Опредѣлить ударъ, получаемый дискомъ, новое состояніе скоростей диска послѣ удара и произведенное измѣненіе живой силы.

4. Однородный твердый шаръ, имѣющій массу m и радиусъ a , движется около своего центра O , который остается неподвижнымъ. Въ шарѣ вдоль діаметра DD' выдолбленъ прямолинейный каналъ съ безконечно тонкимъ поперечнымъ сѣченіемъ; два наскомыхъ, имѣющихъ каждое массу такой же величины m , какъ и шаръ, находятся въ этомъ каналѣ, въ двухъ точкахъ I и I' , лежащихъ симметрично относительно центра O . Въ начальный моментъ $t=0$ шаръ обладаетъ вращеніемъ ω_0 вокругъ данной мгновенной оси, и, начиная съ этого момента, наскомыя идутъ въ каналѣ, слѣдуя данному закону, и опираются на стѣнки канала, все время оставаясь симметричными относительно центра O . Найти движеніе системы, рассматривая наскомыя, какъ матеріальныя точки.

Въ качествѣ осей, связанныхъ съ шаромъ, возьмемъ ось Oz , направленную по каналу DD' и два другихъ діаметра Ox и Oy , которые образуютъ вмѣстѣ съ осью Oz ортогональный трехгранный уголъ. Составляющія по осямъ $Oxuz$ мгновеннаго вращенія ω шара назовемъ черезъ p , q , r ; наконецъ, черезъ z и $-z$ обозначимъ координаты наскомыхъ, предполагая, что z есть данная функція времени: $z=f(t)$.

Рассмотрѣть въ частности слѣдующіе вопросы.

1° Пусть $O\sigma$ будетъ результирующій моментъ количествъ движенія всѣхъ точекъ системы около точки O ; изучить абсолютное движеніе точки σ въ пространствѣ и движеніе ея относительно осей $Oxuz$.

2° Показать, что составляющія p , q , r могутъ быть выражены посредствомъ квадратуръ въ функціи времени t .

3° Выразить затѣмъ въ функціи времени t Эйлеровы углы θ , φ , ψ , выбравъ надлежащимъ образомъ неподвижныя оси.

4° Изучить частный случай, когда ось начального мгновеннаго вращенія шара находится въ плоскости xOy .

5° Выполнить вычисленіе въ случаѣ, когда начальное вращеніе произвольно, но движеніе наскѣкомыхъ подчинено закону

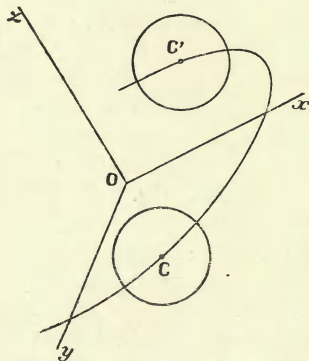
$$z = ae^{-kt},$$

гдѣ k есть положительная константа.

Каково будетъ при этомъ предположеніи предѣльное движеніе, къ которому стремится движеніе системы.

5. Пусть $Oxyz$ будетъ ортогональный трехгранный уголъ, вершина котораго O неподвижна. Точка O есть центръ кольца, образуемаго безконечно тонкимъ невѣсомымъ круговымъ стержнемъ, который находится въ плоскости xOy и неизмѣнно связанъ съ этой плоскостью. На стержень наизаны два одинаковыхъ однородныхъ и массивныхъ шара, центры которыхъ лежатъ на стержнѣ; такимъ образомъ, шары могутъ лишь скользить вдоль кольца; кромѣ того, благодаря нѣкоторымъ связямъ, они должны оставаться симметричными относительно оси Ox . Предполагается далѣе, что эти связи безъ тренія, и что скольженіе шаровъ вдоль кольца происходитъ также безъ тренія. Наконецъ, составленная такимъ образомъ система свободна отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ

1° Составить дифференціальныя уравненія, опредѣляющія мгновенное



Фиг. 222.

вращеніе трехграннаго угла $Oxyz$ и уголъ α , образуемый прямыми OC и OC' съ осью Ox . Предполагая, что эти уравненія проинтегрированы, показать затѣмъ, какимъ образомъ можно вычислить Эйлеровы углы, опредѣляющіе положеніе трехграннаго угла относительно осей, надлежащимъ обра-

зомъ выбранныхъ, а также силы связи, дѣйствующія на каждый шаръ, если разсматривать его, какъ свободный.

2° Въ известный моментъ внезапно вводятъ новую связь, которая прикрѣпляетъ оба шара неподвижно къ стержню; опредѣлить, какія могутъ наступить измѣненія скорости, а также удары связи, испытываемые въ этотъ моментъ каждымъ шаромъ.

3° Предполагая, что внезапно введенная связь становится длительной, составить дифференціальныя уравненія движенія системы. Изучить это движеніе, допустивъ далѣе, что въ моментъ удара уголъ μ равенъ $\frac{\pi}{4}$; найти затѣмъ такую точку кольца, чтобы въ данный позднѣйшій моментъ вся система мгновенно стала неподвижной, если внезапно сдѣлать эту точку неподвижной.

Замѣчаніе. — Радиусъ кольца равенъ a , а радиусъ и масса каждого шара равны соответственно b и m .

6. Обозначимъ черезъ $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ соответственно неподвижный и подвижный ортогональный трехгранный уголъ; оба угла имѣютъ общую вершину и взяты въ прямомъ положеніи. Твердое тѣло S , неподвижно соединенное съ вторымъ трехграннымъ угломъ, можетъ, такимъ образомъ, двигаться около неподвижной точки O .

Составить уравненія его движенія, зная, что

1° эллипсоидъ инерціи тѣла для точки O есть тѣло вращенія вокругъ оси Oz ;

2° твердое тѣло S , которое считается невѣсомымъ, находится подъ дѣйствіемъ силы F , которая приложена въ точкѣ G оси Oz , направлена по прямой PG и равна данной функціи $f(GP)$ отъ разстоянія между точками G и P , опредѣляемыми соответственно равенствами $OG = a$ и $OP = b$, при чемъ точка P лежитъ на оси Oz_1 ;

3° въ началѣ движенія уголъ zOz_1 равенъ прямому, и мгновенное вращеніе твердаго тѣла S находится въ плоскости zOz_1 , а проекціи этого вращенія на оси Oz и Oz_1 равны соответственно ω и ω_1 .

Приложеніе. — Тѣло S представляетъ собой однородный шаръ съ центромъ въ точкѣ G ; радиусъ шара равенъ a , а масса его равна M ; кромѣ того дано:

$$b = a, \quad \omega_1 = -\frac{7}{2} \omega, \quad f(GP) = \frac{28}{5} Ma^4 \omega^2 \frac{1}{GP^3}.$$

Выразить Эйлеровы углы явно въ функціяхъ времени.

Опредѣлить и изучить послѣдовательно траекторіи конца вектора мгновеннаго вращенія относительно двухъ ортогональных трехгранныхъ угловъ OXY_1z_1 и OXY_2z_2 , предполагая, что они ориентированы такимъ же образомъ, какъ уголъ $Ox_1y_1z_1$, при чемъ OX есть перпендикуляръ къ плоскости zOz_1 .

7. Твердое тѣло вращенія S можетъ вращаться около своего центра тяжести, который остается неподвижнымъ въ пространствѣ. Этотъ центръ

тяжести служить общей вершиной двухъ трехгранныхъ угловъ: угла $O\xi\eta\zeta$, неподвижнаго въ пространствѣ, и угла $O\chi\psi\epsilon$, связаннаго съ твердымъ тѣломъ, при чемъ ось Oz направлена по оси вращенія.

Точка P , лежащая на прямой Oz на данномъ разстояніи d отъ точки O , находится подъ дѣйствіемъ силы, перпендикулярной къ оси $O\xi$ и направленной въ сторону этой оси. Если черезъ K обозначимъ постоянный коэффициентъ, черезъ M — массу всего твердаго тѣла S и черезъ ρ — разстояніе точки P отъ оси $O\xi$, то абсолютное значеніе этой силы выразится черезъ $KM\rho$.

1° Составить дифференціальныя уравненія, которыя опредѣляютъ въ функции времени параметры, фиксирующіе положеніе подвижнаго трехграннаго угла.

2° Если предположимъ, что ось твердаго тѣла S вначалѣ перпендикулярна къ оси $O\xi$ и что твердому тѣлу сообщаютъ начальное вращеніе вокругъ оси Oz , то это вращеніе будетъ затѣмъ продолжаться. Какое значеніе минимумъ можно приписать угловой скорости этого вращенія для того, чтобы это послѣднее было устойчивымъ, т. е. чтобы ось Oz неопредѣленно долго оставалась безконечно близкой къ плоскости $\xi O\eta$, если очень мало возмущать движеніе?

3° Предположимъ, что ось Oz вначалѣ занимаетъ произвольное положеніе и что составляющая по оси Oz начального вращенія имѣетъ данное значеніе, отличное отъ нуля; каковы должны быть другія начальные условія движенія для того, чтобы ось Oz при неограниченномъ возрастаніи времени стремилась занять предѣльное положеніе, перпендикулярное къ оси $O\xi$? Каковы будутъ главныя свойства движенія въ случаѣ, когда эти условія выполнены?

4° Изучить движеніе въ слѣдующемъ частномъ случаѣ: твердое тѣло S состоитъ изъ твердаго стержня, не имѣющаго массы и направленнаго по оси Oz , и двухъ одинаковыхъ круговыхъ дисковъ, центры которыхъ лежатъ на оси Oz и плоскости которыхъ перпендикулярны къ этой оси и расположены на разстояніи $\frac{l}{\sqrt{2}}$ отъ точки O . Предполагается, что въ каждомъ дискѣ масса распределена равномерно по окружности радіуса l и равна m . Точка P служить центромъ одного изъ дисковъ, и коэффициентъ K равенъ 2. Условія п. 3° выполняются, и составляющая угловой скорости начального вращенія по оси Oz равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Найти геометрическое мѣсто оси Oz твердаго тѣла.

5° Условія п. 3° выполнены для какого-нибудь тѣла вращенія S ; въ извѣстный моментъ этому тѣлу сообщаютъ ударъ, имѣющій данную величину и перпендикулярный къ плоскости $\xi O\xi$. По какой линіи дѣйствія нужно приложить этотъ ударъ для того, чтобы ось Oz въ послѣдующемъ движеніи стремилась къ предѣльному положенію, перпендикулярному къ оси $O\xi$? Сравнить новое перемѣщеніе оси Oz съ тѣмъ, которое имѣло бы мѣсто, если бы не было удара.

Замѣчаніе. — Положеніе подвижнаго трехграннаго угла относительно неподвижнаго опредѣляется Эйлеровыми углами θ , φ , ψ . Далѣе, A и B обозначают моменты инерціи вокруг осей Ox и Oz ; p , q , r — составляющія вращенія по осямъ Ox , Oy , Oz и $2T$ — живая сила твердаго тѣла; эти количества связаны слѣдующими формулами:

$$p = \psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi,$$

$$q = \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi,$$

$$r = \psi' \cos \theta + \varphi',$$

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\sin^2 \theta \psi'^2 + \theta'^2) + C(\psi' \cos \theta + \varphi')^2.$$

8. Однородное и тяжелое тѣло вращенія Σ , подобное волчку, опирается остриемъ S на неподвижную горизонтальную плоскость H ; острие скользитъ безъ тренія по этой плоскости; система не подчинена никакимъ другимъ связямъ и находится лишь подъ дѣйствіемъ силы тяжести.

Черезъ G обозначимъ центръ тяжести тѣла Σ и черезъ l — разстояніе SG ; движеніе тѣла опредѣляется измѣненіемъ Эйлеровыхъ угловъ θ , φ , ψ ; θ есть уголъ прямой SG съ вертикальной прямой, направленной внизъ; φ — уголъ прецессіи и ψ — уголъ собственно вращенія; черезъ p , q , r обозначимъ составляющія мгновеннаго вращенія по оси, по горизонтальной прямой, перпендикулярной къ оси, и по общему перпендикуляру къ этимъ двумъ прямымъ; μ и μ' — моменты вращенія вокругъ оси и вертикальной прямой, проходящей черезъ точку G .

1° Написать уравненія движенія тѣла Σ . Предположимъ, что въ началѣ движенія производная угла θ по времени равна нулю; какому условію должны удовлетворять начальныя данныя для того, чтобы уголъ θ неопредѣленно долго сохранялъ постоянное значеніе?

2° Численный примѣръ. — Предположимъ, что вся масса тѣла Σ сконцентрирована на однородной окружности, плоскость которой перпендикулярна къ оси, центръ G лежитъ на оси и радіусъ равенъ 10 см.; разстояніе SG , или l , равно 20 см. и напряженіе g силы тяжести принимается равнымъ 980 С. Г. С. Въ своемъ начальномъ положеніи ось SG наклонена къ вертикальной прямой подъ угломъ $\frac{\pi}{6}$, и начальное движеніе есть геометрическая сумма двухъ вращеній: одно происходитъ вокругъ вертикальной оси, проходящей черезъ точку G , съ угловой скоростью, соответствующей 1 оборотамъ въ секунду, другое — вокругъ оси SG съ угловой скоростью, соответствующей 50 оборотамъ въ секунду. Вычислить, при какомъ численномъ значеніи n уголъ θ неопредѣленно долго сохранять то же значеніе, что и въ начальный моментъ.

3° Тѣло Σ и начальныя данныя произвольны и ограничены лишь тѣмъ условіемъ, чтобы точка G перемѣщалась по вертикальной прямой и чтобы острие S оставалось все время на плоскости H . Въ извѣстный моментъ къ тѣлу Σ приближаютъ твердую прямую D , которую держатъ въ неподвижномъ положеніи, и эта прямая D ударяется тѣломъ Σ по образцу

упругихъ тѣлъ; предполагають, что въ моментъ удара прямая D перпендикулярна къ вертикальной плоскости, содержащей прямую SG , и черезъ c обозначаютъ вертикальное разстояніе этой прямой отъ горизонтальной плоскости H ; послѣ удара прямую отклоняють такимъ образомъ, чтобы послѣдующее движеніе тѣла Σ не было стѣсняемо.

Обозначимъ черезъ M_1 и M_2 движенія тѣла Σ до и послѣ удара; показать, что предѣлы, между которыми колеблется θ , болѣе тѣсны въ движеніи M_2 , чѣмъ въ движеніи M_1 . Остается ли въ силѣ это заключеніе въ случаѣ, когда соударяющіяся тѣла не обладаютъ совершенной упругостью?

4° Предположимъ, что упругость будетъ совершенной и что дано движеніе M_1 ; можно ли выбрать уголъ θ , образуемый въ моментъ удара осью SG съ вертикальной прямой, такъ, чтобы этотъ уголъ оставался постояннымъ во время движенія M_2 ? Каковы должны быть при этомъ другія обстоятельство удара? Показать въ частности, по какимъ линіямъ можетъ совершиться ударъ, произведенный столкновеніемъ въ точкѣ соприкосновенія прямой D и тѣла Σ , и вывести отсюда положенія, которыя можно приписать прямой D .

5° Разсмотримъ теперь случай, когда тѣло Σ содержитъ въ себѣ безконечно тонкій стержень, направленный по оси тѣла, и ударъ происходитъ въ точкѣ этого стержня при условіяхъ п. 4°; показать, что при этомъ, вообще, возможны два положенія D' и D'' прямой D и опредѣлить эти положенія. Предположимъ, что мы вычислили для случая, когда прямая D занимаетъ положеніе D' , удары въ моментъ столкновенія и элементы движенія M_2 ; какія измѣненія придется внести въ результаты этого вычисленія, когда мы заставимъ прямую D принять положеніе D'' ?

6° Какъ нужно выбрать условія для того, чтобы одно изъ положеній D' и D'' находилось въ плоскости H ? Показать, что въ случаѣ, если прямая D занимаетъ другое положеніе, столкновеніе не вызоветъ никакого удара въ остріѣ S . Могутъ ли массы тѣла Σ быть распредѣлены такъ, чтобы это обстоятельство не имѣло мѣста ни при какомъ движеніи M_1 ?

7° Исходя изъ общихъ условій, изложенныхъ въ п. 5°, изслѣдовать число и положеніе тѣхъ прямыхъ D' или D'' , при которыхъ въ результатѣ удара остріе S не подымается; рассмотретьъ отдѣльно случай, когда ось тѣла Σ при движеніи M_1 въ моментъ столкновенія приближается къ вертикали, и случай, когда она удаляется отъ нея.

ПРИМѢЧАНІЯ РЕДАКТОРА.

1) (стр. 9). Въ разсматриваемомъ случаѣ проекція вектора $O\sigma$ на любую постоянную ось остается неизмѣняемой при измѣненіи t , такъ что λ , μ , ν суть постоянныя величины. Это означаетъ, что векторъ $O\sigma$ остается неизмѣняемымъ, вслѣдствіе чего точка σ остается неподвижной.

2) (стр. 9). Эта плоскость, не измѣняющаяся въ разсматриваемомъ случаѣ при измѣненіи t , называется часто „неизмѣняемой плоскостью Лапласа“.

3) (стр. 41). Ибо сила R и составляющія пары OK встрѣчаютъ неподвижную ось.

4) (стр. 58). Чтобы не усложнять чертежа (фиг. 151), углы $d\theta$, $d\varphi$ и $d\psi$ на немъ не указаны. Можно, если угодно, принять, что на фиг. 151-ой три величины $d\theta$, $d\varphi$ и $d\psi$ равны нулю, такъ что обѣ стороны угла $d\theta$ совпадаютъ съ прямой Oz , обѣ стороны угла $d\varphi$ — съ прямой Ox и, наконецъ, стороны угла $d\psi$ — съ прямой OI .

5) (стр. 83). Ибо въ противномъ случаѣ $\frac{du}{dt}$ не было бы вещественнымъ числомъ при $u = \beta: (br_0)$.

6) (стр. 84). Какъ и прежде, прямая OI есть пересѣченіе плоскостей xOy и $x'O'y'$ и потому, будучи перпендикулярной къ прямымъ Oz и Oz' , прямая OI перпендикулярна также къ плоскости zOz' и къ прямой OP' , лежащей въ этой плоскости.

7) (стр. 85). Черезъ точку P , лежащую на общей образующей конуса осей Oz и одного изъ предѣльныхъ конусовъ на разстояніи $OP=1$ отъ вершины O , проведемъ плоскость π , перпендикулярную къ оси Oz_1 и встрѣчающую эту ось въ точкѣ C . Плоскость π пересѣкаетъ поверхность конуса осей Oz_1 по нѣкоторой кривой s , а поверхность предѣльнаго конуса по кругу центра C . Касательная t къ этому кругу въ точкѣ P имѣетъ на плоскости x_1y_1 проекцію, проходящую черезъ точку P' и перпендикулярную къ прямой OP' ; ту же проекцію имѣетъ, какъ это показано въ текстѣ, и касательная къ кривой s въ точкѣ P . Отсюда слѣдуетъ, что обѣ эти касательныя, находясь въ одной плоскости π , параллельной плоскости x_1y_1 , сливаются. Плоскость, проходящая черезъ образующую OP и общую касательную t , будетъ касательной къ конусу осей Oz и къ предѣльному конусу. Но, если $u_1 \in \beta: (br_0)$, то, по

сокращеніи на $\sqrt{u - u_1}$, мы найдемъ, что $tg V = \frac{\sqrt{u - u_1}}{u \sqrt{a(u_2 - u)(u' - u)}} br_0$ и

потому $tgV=0$ при $u=u_1=\beta:(br_0)$. Въ этомъ случаѣ касательная τ перпендикулярна къ касательной къ кривой s въ точкѣ P . Конусы пересѣкаются теперь ортогонально.

8) (стр. 108). Ибо пара $G' = Nd$ имѣетъ плечо δ , а та изъ силъ пары, которая приложена въ точкѣ m , равна и прямо противоположна нормальной реакціи N .

9) (стр. 138). Начальная элементарная работа равнодѣйствующей F силъ $F_v, F'_v, F''_v, \dots$ равна $Fv_0 dt$, гдѣ v_0 есть начальная скорость. Въ разсматриваемомъ случаѣ $v_0=0$, а потому и элементарная работа равна нулю.

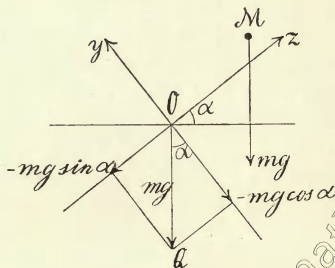
10) (стр. 139). Связи системы выражаются аналитически при помощи уравненій и неравенствъ, связывающихъ координаты точекъ системы и время. Если связи выражены m уравненіями

$$\varphi_s(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, (s = 1, 2, \dots, m),$$

то $m < 3n$, гдѣ n есть число точекъ системы. Въ самомъ дѣлѣ, при $m > 3n$, уравненія связей будутъ вообще несовмѣстимы; при $m = 3n$, въ случаѣ независимости функцій φ_s , всѣ $3n$ координатъ точекъ системы будутъ уже опредѣленными функціями отъ t , и движеніе системы будетъ опредѣлено вполне связями независимо отъ дѣйствующихъ силъ. Если $m < 3n$, то, положивъ $m - 3n = k$, можно изъ m уравненій $\varphi_s = 0$ опредѣлить $m - k$ координатъ въ функціи остальныхъ k координатъ. Можно въ этомъ случаѣ положить эти k независимыхъ координатъ соответственно равными k произвольнымъ функціямъ отъ какихъ-либо k независимыхъ параметровъ $q_1, q_2, \dots, q_k$, и тогда всѣ $3n$ координатъ будутъ функціями этихъ k независимыхъ параметровъ. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что система имѣетъ k степеней свободы.

11) (стр. 145). Т. е. функціи $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ не содержать явно времени t .

12) (стр. 167). Для вывода нижеслѣдующихъ въ текстѣ равенствъ достаточно взглянуть на прилагаемый чертежъ, гдѣ α есть острый уголъ пря-



мой z съ горизонтальной плоскостью, а вертикальный векторъ $OQ = mg$ лежитъ въ одной плоскости (вертикальной) съ осями Oy и Oz .

13) (стр. 168). Полагая $r = k \sin \omega t$ въ уравненіи $r'' - \omega^2 r = -g \sin \omega t \cos \alpha$, мы найдемъ, что это уравненіе, предполагая r отличнымъ отъ нуля, удовлетворяется при $r = k \sin \omega t$ тогда и только тогда, когда $2k\omega^2 = g \cos \alpha$.

14) (стр. 205). Черезъ точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ проведемъ внѣшнюю нормаль, направляющіе косинусы которой α, β, γ суть функціи отъ x_0, y_0, z_0 , а не отъ x, y, z . Если $M(x, y, z)$ есть какая-либо другая точка этой нормали и n есть длина отрезка M_0M , то

$$x - x_0 = n\alpha; y - y_0 = n\beta; z - z_0 = n\gamma.$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція $\varphi(x, y, z)$ есть функція одного только параметра n , если мы будемъ ее разсматривать не для точекъ поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$, а для точекъ нормали, которыхъ координаты $x = x_0 + n\alpha$, $y = y_0 + n\beta$, $z = z_0 + n\gamma$ суть функціи одной переменннй n . Производная $\frac{d\varphi}{dn}$,

взятая въ этомъ предположеніи, называется производною по внѣшней нормали и выражается черезъ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dn}$ или $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma$.

См. также п. 76.

15) (стр. 207). Если $PP_1 = ds$ есть элементъ пути движущейся точки P , то элементарная работа силы T_k на этомъ пути равна $F_k ds \cos(F_k, ds)$, а такъ какъ $dr_k = ds \cos(F_k, ds)$, то элементарная работа силы F_k равна $F_k dr_k$. См. также п. 77.

16) (стр. 207). Если x_k, y_k, z_k суть координаты неподвижной точки M_k , то

$$r_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2,$$

откуда

$$\frac{\partial r_k}{\partial x} = \frac{x - x_k}{r_k} = \cos(r_k, x),$$

поэтому проекція на ось x -овъ равнодѣйствующей F всѣхъ притяженій, равная $-\frac{f \mu m_1}{r_1^2} \cos(r_1, x) - \dots - \frac{f \mu m_n}{r_n^2} \cos(r_n, x)$, равна также

$$-\frac{f \mu m_1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} - \dots - \frac{f \mu m_n}{r_n} \frac{\partial r_n}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

17) (стр. 226). Ибо $\frac{1}{rr'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)^2 < 0$ при $r \neq r'$.

18) (стр. 248). Если интеграль $\int_V g d\tau$, взятый по объему V , распространить на одинъ только моментъ $d\tau$ объема, то мы будемъ имѣть равенство $\int_{d\tau} g d\tau = g d\tau$, и если для любого объема V интеграль $\int_V g d\tau$ равенъ нулю, то, въ частности, $g d\tau = 0$, а такъ какъ $d\tau \neq 0$, то $g = 0$.

19) (стр. 267). Пояснимъ содержаніе этой теоремы и докажемъ ея. Пусть

$$z = f(x, y)$$

будетъ уравненіе разсматриваемой поверхности Σ и

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

— уравненіе касательной плоскости къ этой поверхности въ точкѣ $M(x, y, z)$, гдѣ, какъ обыкновенно,

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Черезъ точку M проведемъ другую поверхность

$$z = g(x, y),$$

которая пересѣкается съ поверхностью Σ по кривой S , проходящей черезъ точку M . Рѣшая уравненія $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$ относительно y и z , мы представимъ уравненія кривой S въ формѣ $y = v(x)$; $z = \mu(x) = f[x, v(x)]$. Каждому значенію x будетъ на кривой S соответствовать точка, имѣющая координаты $x, y = v(x), z = f[x, v(x)]$. Если мы теперь станемъ проводить касательныя плоскости къ поверхности Σ въ различныхъ точкахъ кривой S , то получится семейство плоскостей, зависящихъ отъ одного параметра x . Уравненіе

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \quad (1)$$

есть общее уравненіе плоскостей этого семейства, при чемъ параметръ x входитъ въ уравненіе (1) явно и неявно, содержась въ z, p и q . Каждому значенію параметра x соответствуетъ опредѣленная точка $M(x, y, z)$ кривой S и опредѣленная плоскость семейства плоскостей (1), касающаяся поверхности Σ въ точкѣ M . На каждой изъ этихъ плоскостей лежитъ такъ называемая характеристика, которая есть предѣлъ прямой пересѣченія разсматриваемой плоскости (соответствующей параметру x) съ плоскостью, соответствующей параметру $x + \Delta x$, при чемъ Δx совершаетъ предѣльный переходъ къ нулю. Теорема утверждаетъ, что точка $M(x, y, z)$ касанія плоскости (1), соответствующей опредѣленному значенію параметра x , лежитъ на характеристикѣ этой плоскости.

Для доказательства замѣтимъ, что уравненіями характеристики будутъ уравненіе (1) и уравненіе

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{dp}{dx}(X - x) + \frac{dq}{dx}(Y - y) - p - q \frac{dy}{dx},$$

получаемое изъ уравненія (1) дифференцированіемъ по параметру x , явно и неявно входящему въ уравненіе (1). При этомъ $\frac{dz}{dx}$ есть производная отъ z по x , получаемая дифференцированіемъ функции $z = f(x, y)$, гдѣ $y = v(x)$, такъ что

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = p + q \frac{dy}{dx}.$$

Такимъ образомъ. уравненіями разсматриваемой характеристики будутъ уравненія

$$Z - z = p (X - x) + q (Y - y),$$

$$0 = \frac{dp}{dx} (X - x) + \frac{dq}{dx} (Y - y),$$

слѣдовательно, характеристика явно проходить черезъ точку $M (x, y, z)$.



<http://mathesis.ru>



Книгоиздательство научных и популярно-научных сочинений из области физико-математических наук.

Одесса, Новосельская, 66.

ЧИСТАЯ и ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.

АДЛЕРЪ, А. ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. XXVI+325 стр. 8°. Съ 179 рис. 1910. Ц. 2 р. 25 к.

Это качество... дѣлаетъ книгу единственной на русскомъ языкѣ въ данной отрасли геометріи. *Современный міръ*.

АППЕЛЛЬ, П. проф. и **ДОТЕВИЛЛЬ, С.** проф. КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. Введеніе въ изученіе физики и прикладной механики. Пер. съ франц. *Л. Левинтова* подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*.

Вып. I. (механика точки и геометрія массъ). XV+385 стр. 8°. Съ 136 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Вып. II (механика системы) +380 стр. 8° съ 87 черт. 1912.

Ц. 2 р. 50 к.

Книга по содержащемуся въ ней матеріалу соответствуетъ университетскому курсу теоретической механики и представляетъ собой сокращенную переработку обширнаго, трехтомнаго трактата *П. Аппелля* по теоретич. механикѣ.

АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЬ. О КВАДРАТУРѢ КРУГА. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составлен. проф. *Ф. Рудіо*. (*Библ. класс.*). Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Бернштейна*. VIII+155 стр. 8°. Съ 21 черт. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

БОЛЬЦАНО, Б. ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО. (*Библ. класс.*). Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго*. VIII+120 стр. 8°. Съ 12 черт. 1911. Ц. 80 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. Въ обработкѣ проф. *В. Штёккеля*. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополненіями прив. доц. *В. Ф. Кагана*.

Ч. I. Ариѳметика и Алгебра. LXIV+434 стр. 8°. 1911. Ц. 3 р.

Ч. II. Геометрія. XXII+334 стр. 8°. Съ 403 черт. 1912. Ц. 2 р.

ВЕБЕРЪ, Г. проф. и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ, І.** проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Руководство для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Кагана*.

Томъ I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ. * обрабо. проф. *Веберомъ*. XXIV+666 стр. 8°. Съ 38 черт. 2-е изд. 1911. Ц. 4 р.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогическій Сборникъ*.

* Изданія, отмѣченные звѣздочкой, признаны Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. подлежащими внесенію въ списокъ книгъ, заслуживающихъ вниманія при пополненіи учен. библіотекъ средн. учебн. заведеній.

Болѣе подробныя свѣдѣнія о нѣкоторыхъ изданіяхъ см. стр. 10—16.

Томъ II. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ, составленная *Веберомъ, Вельштейномъ и Якобсталемъ*.

Книга I. ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ. * Составилъ *И. Вельштейнъ*. XII+362 стр., больш. 8°. Съ 142 черт. и 5 рис. 1909. Ц. 3 р.

Особый интересъ представляетъ въ книгѣ г. Вельштейна своеобразное изложеніе не-евклидовой геометріи, а также изложеніе проективной геометріи. *Жур. Мин. Н. Пр.*

Книга II и III. ТРИГОНОМЕТРІЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ и СТЕРЕОМЕТРІЯ. Составили *Г. Веберъ и В. Якобсталь*. VIII+321 стр. больш. 8°. Съ 107 черт. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

ГЕЙБЕРГЪ, I. проф. НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ АРХИМЕДА *. Посланіе Архимеда къ Эратосену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. (*Библ. класс.*). Переводъ съ нѣм. подъ ред. и съ предисловіемъ прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*. XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. НЕПРЕРЫВНОСТЬ и ИРРАЦИОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА *. (*Библ. класс.*). Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*, съ присоед. его статьи: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ“. 2-е изд. 40 стр. 8°. 1909. Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанию трудъ... *Русская Школа.*

ДЗЮБЕКЪ, О. проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. проф. СПБ. высшихъ женск. курсовъ *Веры Шиффъ*.

Часть I. Аналитическая геометрія на плоскости. VIII+390 стр. 8°. Съ 87 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Часть II. Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Печатается.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРИИ ВЪ СОВРЕМЕННОЙ ПОСТАНОВКѢ. Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертации на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 черт. 1908. Ц. 35 к.

КАГАНЪ, В. пр.-доц. ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА? * 72 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

Книжка написана яснымъ простымъ языкомъ и, несомнѣнно, вызоветъ къ себѣ интересъ. *Русская Мысль.*

КЛЕЙНЪ, Ф. проф. ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ и ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. Лекціи, читанныя для учителей. Пер. со нѣм. подъ ред. и съ дополн. прив.-доц. *В. Ф. Кагана*. XVI+486 стр. 8°. 1912. Ц. 3 р.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ. * Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. 1 р.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ. *Русская Школа.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. VIII+503 стр. 8°. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Курсъ профессора боннскаго университета, несомнѣнно, является однимъ изъ лучшихъ по ясности и чрезвычайной строгости обоснованія одного изъ могущественныхъ методовъ современнаго анализа. *Соврем. Миръ.*

КУТЮРА, Л. АЛГЕБРА ЛОГИКИ. Пер. съ франц. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго*. IV+107+XIII стр. 8°. 1909. Ц. 90 к.

КЭДЖОРИ, Ф. проф. ИСТОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (съ указаніями на методы преподаванія) *. Пер. съ англ. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*. VIII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна.. Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элем. мат.“ Кэджори. *Вѣстн. Воспит.*

МАРКОВЪ, А. акад. ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ. Въ 2 частяхъ. Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. VIII+274 стран. 8°. 1911. Ц. 2 р. 25 к.

НЕТТО, Е. проф. НАЧАЛА ТЕОРИИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. VIII+156 стр. 8°. 1912. Ц. 1 р. 20 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. НАУКА и МЕТОДЪ. Пер. съ франц. *И. Брусиловскаго* подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана*. VIII+384 стр. 16°. 1910. Ц. 1 р. 50 к.

... книгу Пуанкаре можно рекомендовать особому вниманію преподавателей математики и естествознанія. *Вѣстникъ Воспитанія.*

РОУ, С. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ СЪ КУСКОМЪ БУМАГИ. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. 1910. Ц. 90 к.

Производитъ впечатлѣніе гармоничнаго цѣлаго и читается съ большимъ интересомъ. *Русская Школа.*

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОГРАФІЯ. Вып. I. Списокъ сочиненій по чистой и прикл. математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи въ 1908 г. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова*. 76 стр. 8°. 1911. Ц. 60 к.

Такой указатель чрезвычайно цѣненъ. *Природа и Люди.*

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. ОБЪЕМЪ ШАРА, ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. 16°. Съ 6 чер. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

ШУБЕРТЪ, Г. проф. МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ. Пер. съ нѣм. *И. Левинтова*, подъ ред., съ прим. и доб. „В. О. Ф. и Элем. Мат.“ XIV+358 стр. 16°. Со мног. табл. 1911. Ц. 1 р. 40 к.

Ф И З И К А.

АБРАГАМЪ, Г. проф. СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ. * Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга*.

Часть I: XVI+272 стр. 8°. Свыше 300 рис. 2-е изд. 1909.

Ц. 1 р. 50 к.
Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библиотека Самообразования.*

Часть II: 434+LXXV стр. 8°. Свыше 400 рис. 2-е изд. 1910 г.

Ц. 2 р. 75 к.
Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. ЦАРИЦА МІРА и ЕЯ ТѢНЬ. * Общедоступное изложене основаній ученія объ энергіи и энтропіи. Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8°. 5-е изданіе 1911. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной. *Ж. М. Н. Пр.*

БРАУНЪ, Ф. проф. МОИ РАБОТЫ ПО БЕЗПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФИИ и ПО ЭЛЕКТРООПТИКѢ. Рѣчь, произн. по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополнен. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси*, со вступительной статьей переводчиковъ XXIV+92 стр. 16°. Съ 25 рис. и портр. авт. 1911. Ц. 70 к.

БРУНИ, К. проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ *. Пер. съ итал. подъ ред. „Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.“ 37 стр. 16°. 1909. Ц. 25 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ФИЗИКИ** *. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура*. НѢСКОЛЬКО МЫСЛЕЙ О НОВОЙ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВА. VIII+277 стр. 8°. Съ 5 порт. и 39 рис. 2-е изд. 1912. Ц. 2 р.

... рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандиозныхъ завоеваній челоѣческаго гения. *Современный Миръ.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **СНѢГЪ, ИНЕЙ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ И ЛЕДНИКИ** *. IV+127 стр. 8°. Съ 137 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. 1 р.
„*Na hesis*“ можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ВИНЕРЪ, О. проф. **О ЦВѢТНОЙ ФОТОГРАФИИ И РОДСТВЕННЫХЪ ЕЙ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХЪ ВОПРОСАХЪ** *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. VI+69 стр. 8°. Съ 3 цвѣт. табл. 1911. Ц. 60 к.

Авторъ этой книги — одинъ изъ наиболѣе выдающихся германскихъ физиковъ *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ, В. А. **ОБЪ ЕДИНСТВѢ ВЕЩЕСТВА**. 46 стр. 16°. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **ПРОИСХОЖДЕНІЕ ЦВѢТОВЪ СПЕКТРА**. Съ прилож. статьи *В. Ритца* „Линейные спектры и строеніе атомовъ“. Пер. съ нѣм. 50 стр. 16°. 1910. Ц. 30 к.

Небольшая книжка, принадлежащая перу одного изъ извѣстныхъ ученыхъ нашей эпохи. *Русская Мысль.*

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ** *. Пер. съ нѣм. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 45 стр. 16°. 1910. Ц. 25 к.

Одинъ изъ лучшихъ обзоровъ... Онъ содержитъ, въ сжатомъ видѣ, исторію открытія спектральнаго анализа и дальнѣйшаго ея развитія до нашихъ дней. *Ж. М. Н. Пр.*

КЛОССОВСКИЙ, А. проф. **ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГИИ** *. XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. 4 р.

Честъ и слава „*Mathesis*“ за изданіе этой прекрасной книги, которую можетъ гордиться русская наука. *Ж. М. Н. Пр.*

КЛОССОВСКИЙ, А. проф. **ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ НА ОСНОВАНІИ СОВРЕМЕННЫХЪ ВОЗЗРѢНІЙ**. * 46 стр. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

КОНЪ, Э. проф. и **ПУАНКАРЕ, Г.** акад. **ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ФИЗИКИ**. Пер. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 81 стр. 16°. Съ 11 рис. 1912. Ц. 40 к.

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ, Я.** **ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**. * Пер. съ нѣм. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. Въ 2-хъ томахъ больш. формата 892 стр. Съ 799 рисунк. и 6 отд. цвѣтн. табл. 1908. Ц. 7 р. 50 к.

Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛЕМАНЪ, О. проф. **ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ И ТЕОРИИ ЖИЗНИ**. Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго*. VIII+43 стр. 8°. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

... весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. СПЕКТРЪ и ФОРМА АТОМОВЪ. Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16^о. 2-е изд. 1909. Ц. 15 к.

ЛОДЖЪ, О. проф. МИРОВОЙ ЭФИРЪ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова*. VI+216 стр. 16^о. Съ 19 рис. 1911. Ц. 80 к.

Въ лицѣ Лоджа мы имѣемъ выдающагося и ревностнаго сторонника идеи всеобъемлющаго значенія ээира для вселенной.

Русское Богатство.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. КУРСЪ ФИЗИКИ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. Съ добавленіями автора къ русскому изданію.

Т. I. VIII+356 стр. больш. 8^о. Съ 236 рис. 2-е изд. 1912. Ц. 2 р. 75 к. ✓

Т. II. VIII+466 стр. больш. 8^о. Съ 257 рис. 1910. Ц. 3 р. 75 к. ✓

Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики.

Ж. М. Н. Пр.

МАЙКЕЛЬСОНЪ, А. проф. СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ и ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ. Перевела съ англ. *В. О. Хвольсонъ* подъ ред. заслуж. проф. *О. Д. Хвольсона* съ дополн. статьями и примѣч. редактора. VIII+189 стр. Съ 109 рис. и 3 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 1 р. 50 к. ✓

МОРЕНЪ, Ш. ФИЗИЧЕСКІЯ СОСТОЯНІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Л. В. Писаржевскаго*. XIII+224 стр. 8^о. Съ 21 рис. 1912. Ц. 1 р. 40 к.

ПЕРРИ, ДЖ. проф. ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ *. Публ. лекція. Съ добавл. статьи проф. *Б. Доната*. „Волчокъ и его будущее въ технику“. Пер. съ англ. и нѣмецк. VIII+116 стр. 8^о. Съ 73 рис. 3-е изданіе. 1912. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при ея популяризаціи.

Русская Мысль.

ПЛАНКЪ, М. проф. ОТНОШЕНІЕ НОВѢЙШЕЙ ФИЗИКИ КЪ МЕХАНИСТИЧЕСКОМУ МИРОВОЗРѢНІЮ. Пер. съ нѣм. *І. Левинтова*, подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“ 42 стр. 16^о. 1911. Ц. 25 к. ✓

РАМЗАЙ, В проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДИОАКТИВНЫЕ ГАЗЫ. Пер. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 37 стр. 16^о. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

РИГИ, А. проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ. * (Радиоактивность, іоны, электроны). Переводъ съ 3 итальянскаго изданія. VIII+146 стр. 8^о. Съ 21 рис. 2-е изд. 1910. Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному читателю, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій.

Педагогическій Сборникъ.

РИГИ, А. проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. * Вступительная лекція. Пер. съ итальян. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 27 стр. 8^о. 2-е изд. 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныя сочиненій знаменитаго профессора Болоньскаго университета.

Ж. М. Н. Пр.

СЛАБИ, А. проф. БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 28 стр. 8^о. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

СЛАБИ, А. проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Обѣ брошюры принадлежатъ перу большого знатока предмета и выдающагося самостоятельнаго работника въ области практическаго примѣненія электрическихъ волн.
Педагогическій Сборникъ.

СОДДИ, Ф. проф. РАДІЙ и ЕГО РАЗГАДКА. * Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. Д. Хмырова. XVI+185 стр. 8°. Съ 31 рис. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

... авторъ въ увлекательномъ изложеніи вводитъ читателя въ необыкновенно заманчивую область...
Педагогическій Сборникъ.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ англ. *Г. Левинтова*, подъ ред. „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“. VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. ДОБЫВАНІЕ СВѢТА. * Общедоступная лекція для рабочихъ, прочитанная на собраніи Британской Ассоціаціи 1906. Пер. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта.
Жур. Мин. Н. Пр.

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“.

Выпускъ I. * VIII+148 стр. 8°. Съ 41 рис. и 2 таб. 3-е изд. 1909. Ц. 75 к.

Изячно изданный и недорогой сборникъ прочтется каждымъ интересующимся съ большимъ интересомъ.
Вѣстникъ Знанія.

Выпускъ II. IV+204 стр. 8°. Съ 50 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Х И М І Я.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. СТЕРЕОХИМІЯ. (Ученіе о пространственномъ расположеніи атомовъ въ молекулахъ). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. П. Г. Меликова. VIII+164 стр. 8°. Съ 58 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Стереохимія Л. Мамлока написана очень общедоступно.
Природа и Люди.

РАМЗАЙ, В. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИЗУЧЕНІЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Пер. съ англ. подъ ред. проф. П. Г. Меликова. VIII+75 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

Главный интересъ обзора конечно въ томъ, что онъ сдѣланъ крупнымъ самостоятельнымъ изслѣдователемъ въ этой области.
Пед. Сборн.

СМИТЪ, А. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ НЕОРГАНИЧЕСКУЮ ХИМІЮ. Пер. съ англ. подъ ред. проф. П. Г. Меликова. XVI+840 стр. 8°. Съ 107 рис. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Такіе первоклассные ученые, какъ Лёбъ, Оствальдъ и др. признали, что „Введеніе въ неорганическую химію“ Смита обогащаетъ учебную литературу и въ ряду многочисленныхъ руководствъ по химіи должно занять особое, значительное мѣсто.
Ръчь.

ШЕЙДЪ, К. ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. Е. С. Ельчанинова. IV+191 стр. 8°. Съ 79 рис. 1907. Ц. 1 р. 20 к.

ШТОКЪ, А. проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ**, прив.-доц. ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО КОЛИЧЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ. Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. А. *Коншина* подъ ред. проф. П. Г. Меликова. Пер. съ нѣм. VIII+173 стр. 8°. Съ 37 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

... Книга заключаетъ въ себѣ рядъ удачно подобранныхъ и превосходно описанныхъ работъ по объемному весовому анализу.
Ръчь.

А С Т Р О Н О М И Я.

АРРЕНИУСЪ, Св. проф. ОБРАЗОВАНИЕ МИРОВЪ*. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго*. VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. 2-е изд. 1912. Ц. 1 р. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Пед. Сборн.*

АРРЕНИУСЪ, Св. проф. ФИЗИКА НЕБА*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. VIII+250 стр. 8°. Съ 68 рис., 1 черн. и 1 спектр. табл. 1905. *Издание распродано.*

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ. *Русская Мысль.*

БОЛЛЪ, Р. проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. IV+104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 тб. 1909. Ц. 75 к.

... настоящее издание „Mathesis“ слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

ВИХЕРТЪ, Э. проф. ВВЕДЕНИЕ ВЪ ГЕОДЕЗИЮ*. Перев. съ нѣм. IV+95 стр. 16°. Съ 41 рис. 2-е изд. 1912. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школахъ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ГРАФФЪ, К. КОМЕТА ГАЛЛЕЯ*. Пер. съ нѣм. X+71 стр. 16°. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изд. второе испр. и дополн. 1910. Ц. 30 к.
Брошюра Граффа хорошо выполнять свое назначеніе. *Пед. Сборн.*

ГАЛЕЕВА КОМЕТА ВЪ 1910 ГОДУ. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной — О кометахъ — О кометѣ Галлея. 32 стр. 8°. Съ 12 иллюстраціями. 1910. Ц. 12 к.

ЛОВЕЛЛЪ, П. проф. МАРСЪ и ЖИЗНЬ НА НЕМЪ. Пер. съ англ. подъ ред. и съ пред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. XXI+272 стр. 8°. Со многими рис. и 1 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 2 р.

НЬЮКОМЪ, С. проф. АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ*. Пер. съ англ. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. XX+288 стр. 8°. Съ порт. автора, 64 рис. и 1 табл. 2-е изд. 1911. Ц. 1 р. 50 к.

Вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

НЬЮКОМЪ, С. проф. ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ. (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16°. *Изд. распродано.* Ц. 20 к.

ФУРНЬЕ ДАЛЪБЪ. ДВА НОВЫХЪ МИРА. 1. Инфра-мѣръ. 2. Супра-мѣръ. Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8°. Съ 1 рис. и 1 табл. 1911. Ц. 80 к.

Нельзя отказать французскому ученому въ смѣлости и своеобразной красотѣ выводовъ изъ сухихъ цифровыхъ данныхъ положительнаго знанія. *Электричество и Жизнь.*

Б И О Л О Г И Я.

ВЕРИГО, Б. проф. ЕДИНСТВО ЖИЗНЕННЫХЪ ЯВЛЕНІЙ. (*Основы общей биологіи 1.*) VIII+276 стр. 8°. Съ 81 рис. 1912. Ц. 2 р.

ЛЁБЪ, Ж. проф. ДИНАМИКА ЖИВОГО ВЕЩЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова*. VIII+353 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Классическая книга Лёба, отъ чтенія которой трудно оторваться, устанавливаетъ вѣхи достигнутаго въ познаніи динамики живого вещества. *Русское Богатство.*

ЛЁБЪ, Ж. проф. ЖИЗНЬ. Пер. съ нѣм. 30 стр. 8°. 1912. Ц. 30 к.

УШИНСКІЙ, Н. проф. ЛЕКЦІИ ПО БАКТЕРІОЛОГІИ. VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черн. и цвѣтн. рис. на 15 отдѣльн. табл. 1908. Ц. 1 р. 50 к.

V A R I A.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. ПАРАДОКСЫ ПРИРОДЫ *. Книга для юношества, объясняющая явления, которыя находятся въ противорѣчїи съ повседневымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8°. Съ 64 рис. и 3 табл. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

Матеріалъ подобранъ интересный.

Ж. М. Н. Пр.

ГАССЕРТЪ, К. проф. ИЗСЛѢДОВАНИЕ ПОЛЯРНЫХЪ СТРАНЪ. * Исторія путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. проф. Г. И. Танфильева. XII+215 стр. 8°. Съ двумя цвѣтн. картами. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

Книга заслуживаетъ самаго широкаго распространенія.

Естествознаніе и Географія.

ГРОТЪ, П. проф. ВВЕДЕНИЕ ВЪ ХИМИЧЕСКУЮ КРИСТАЛЛОГРАФИЮ Перев. съ нѣм. І. Левинтова подъ ред. проф. М. Д. Сидоренко. VIII+104 стр. 8°. Съ 6 черт. 1912. Ц. 80 к.

НИМФЮРЪ, Р. ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ *. Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8°. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.

Въ книгѣ собранъ весьма обширный описательный матеріалъ.

Ж. М. Н. Пр.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. КАРТИНА МІРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. В. В. Завьялова. VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отд. порт. 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. Пед. Сборн.

ТРОМГОЛЬТЪ, С. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 2-е изд. 1912. Ц. 50 к.

ШМИДЪ, Б. проф. ФИЛОСОФСКАЯ ХРЕСТОМАТІЯ. * Пер. съ нѣм. Ю. Говсѣева, подъ ред. и съ пред. проф. Н. Н. Ланге. VIII+172 стр. 8°. 1907. Ц. 1 р.

... Для челоѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философїей и наукой, она (книга) даетъ разнобразный и интересный матеріалъ.

Вопросы философіи и психологіи.

Имѣются на складѣ:

БИЛЬТЦЪ, Г. и В. УПРАЖНЕНІЯ ПО НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Пер. съ нѣм. А. Комаровскаго, съ пред. проф. Л. В. Писаржевскаго. XVI+272 стр. 8°. Съ 24 рис. Ц. 1 р. 60 к.

Книга Biltz'a способна вызвать самое горячее увлеченіе химіей.

W. Ostwald. Zeitschrift für Physikalische Chemie.

МУЛЬТОНЪ, Ф. проф. ЭВОЛЮЦІЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. Пер. съ англійск. VI+83 стр. 16°. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.

Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

Выписывающіе изъ главнаго склада изданій „Матезисъ“ (Одесса, Новосельская, 66) на сумму 5 руб. и болѣе за пересылку не платятъ.

Подробный каталогъ высылается по требованію бесплатно.

Печатаются и готовятся къ печати:

АНДУАЙЕ, проф. КУРСЪ АСТРОНОМІИ. Пер. съ франц.

БАХМАНЪ, проф. ОСНОВЫ НОВѢЙШЕЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О Шатуновскаго*.

ВЕРИГО, Б. Ф. проф. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ БІОЛОГІИ. II. „Біологія клѣтки и ея значеніе для общей біологіи“.

ДАННЕМАННЪ, Ф. проф. КРАТКАЯ ИСТОРІЯ ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣмецкаго подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *И. И. Борзмана*.

ДЗЮБЕКЪ, О. проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. *Часть 2-я.* Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б. высш. жен. курсовъ *В. І. Шиффъ*.

КЛАРКЪ, А. ИСТОРІЯ АСТРОНОМІИ XIX СТОЛѢТІЯ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. С.-П.-Б. универ. *В. Серафимова*.

КОЛЬРАУШЪ, Ф. проф. КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО КЪ ПРАКТИЧЕСКИМЪ ЗАНЯТІЯМЪ ПО ФИЗИКЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*.

КОРБИНЪ, Т. СОВРЕМЕННЫЯ УСПѢХИ ТЕХНИКИ. Пер. съ англ.

ЛАДЕНБУРГЪ, А. проф. ЛЕКЦИИ ПО ИСТОРІИ ХИМИИ ОТЪ ЛАВУАЗЬЕ ДО НАШИХЪ ДНЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова*.

ЛЕВИ. МАТЕМАТИКА СТРАХОВАНІЙ. Пер. съ нѣмецкаго.

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. ОЧЕРКИ ИСТОРІИ ХИМИИ.

МИ, Г. проф. КУРСЪ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА и МАГНЕТИЗМА. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *О. Д. Хвольсона*.

ПЁШЛЬ. ВВЕДЕНИЕ ВЪ ХИМІЮ КОЛЛОИДОВЪ. Пер. съ нѣм. *А. С. Комаровскаго и Я. П. Мосешвили*.

ПОЙНТИНГЪ, Дж. проф. СВѢТОВОЕ ДАВЛЕНІЕ. Пер. съ англ.

САКСЛЬ и РУДИНГЕРЪ. БІОЛОГІЯ ЧЕЛОВѢКА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Л. А. Тарасевича*.

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ. Вып. II. За 1909 г. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова*.

ЧЕЗАРО, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА и ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНОМАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *К. А. Поссе*.

ШТОЛЬЦЪ и ГМЕЙНЕРЪ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИѦМЕТИКА. Пер. съ нѣмецкаго.

ШУЛЬЦЕ, д-ръ ВЕЛИКІЕ ФИЗИКИ и ИХЪ ТВОРЕНІЯ. Пер. съ нѣмецкаго.

ФИЛИППОВЪ, А. ЧЕТЫРЕ АРИѦМЕТИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

ЩУКАРЕВЪ, А. проф. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПОЗНАНІЯ ВЪ ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ.

ЮНГЪ, проф. ОСНОВНЫЯ ПОНЯТІЯ АЛГЕБРЫ и ГЕОМЕТРИИ. Пер. съ англійскаго.

Прив.-доц. А. АДЛЕРЪ

ТЕОРІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніями прив.-доц. С. О. Шатуновскаго. XXVI + 325 стр. 8⁰. Съ 179 рис. 1910 г. Цѣна 2 руб. 25 коп.

Содержаніе: Предисловіе автора. Предисловіе редактора. Введеніе редактора. Историческія замѣчанія. I Методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. II. Построенія, выполняемыя съ помощью проведенія лишь прямыхъ линій при пользованіи данными фигурами (Штейнеровы построенія). III. Построенія, выполняемыя помощью описыванія окружностей (Маскероніевы построенія). IV. Построенія съ помощью линейки о двухъ параллельныхъ краяхъ (двѣ параллельныя прямая на постоянномъ разстояніи); построенія съ помощью подвижнаго прямого угла; построенія съ помощью произвольнаго подвижнаго угла; построенія съ помощью линейки и эталона длины; построенія съ помощью биссектора. V. Задачи на построеніе первой и второй степени. VI. Доказательства невозможности. VII. Дѣленіе окружности (Построеніе правильныхъ многоугольниковъ). VIII. Геометрическая построенія третьей и четвертой степени. IX. Историческія замѣчанія относительно квадратуры круга; приближенное выпрямленіе окружности; правила для возможно болѣе точнаго построенія. X. Геометрографія.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ. „Предлагаемая вниманію читателей книга А. Адлера представляетъ крупнѣйшій интересъ во многихъ отношеніяхъ... Она имѣетъ дѣльно не столько изложеніе различныхъ частныхъ приемовъ рѣшенія конструктивныхъ задачъ, сколько систематическое изложеніе общихъ методовъ рѣшенія задачъ на построеніе при помощи тѣхъ или иныхъ чертежныхъ приборовъ и, въ особенности, установленіе критеріевъ разрѣшимости или неразрѣшимости данной задачи при помощи этихъ приборовъ. Этотъ послѣдній вопросъ, представляющій величайшій теоретическій и практический интересъ, въ настоящее время является вполне рѣшеннымъ для наиболѣе употребительныхъ приборовъ, какъ циркуль, линейка, и т. д... Совмѣстнымъ усиленіемъ алгебры и геометріи удалось постепенно создать теорію геометрическихъ построеній, которая по существу завершена въ настоящее время, являясь однимъ изъ наиболѣе блестящихъ завоеваній математическаго гения... Если прибавить обиліе интересныхъ задачъ для самостоятельнаго упражненія, то нельзя не признать, что сочиненіе Адлера является въ высокой степени цѣннымъ вкладомъ въ элементарную геометрическую литературу. Отдѣльные главы этой книги могутъ быть использованы преподавателями средней школы во время общаго изученія геометріи, что, несомнѣнно, будетъ содѣйствовать оживленію интереса къ этой наукѣ... Въ заключеніе отмѣчу весьма интересное введеніе и примѣчанія редактора перевода прив. доц. С. Шатуновскаго — еще болѣе увеличивающія цѣнность этой прекрасной во всѣхъ отношеніяхъ книги“. Прив.-доцентъ С. Бернштейнъ (*Педагогическій Сборникъ*).

„Надо признать, что ни въ одномъ изъ трудовъ, посвященныхъ тому же предмету, вопросъ о геометрическихъ построеніяхъ не разсматривается при полной доступности изложенія съ такой широтой, какъ въ данной книгѣ... Для большинства лицъ, интересующихся геометрическими построеніями, наиболѣе удобнымъ пособіемъ для обзоранія и изученія всего того, что сдѣлано въ этой области съ самыхъ отдаленныхъ временъ до нашихъ дней, будетъ разсматриваемое сочиненіе... Надо пожелать, чтобы переводъ сочиненія Адлера получилъ у насъ такое же распространеніе, какъ его оригиналъ заграничій“. А. К. (*Речь*, 28 марта 1911 года).

„Геометрическіе вопросы, связанные съ геометрическими построеніями, изложены въ этой книгѣ съ достаточной полнотой. Это качество въ связи съ разнообразіемъ примѣровъ и задачъ дѣлаетъ книгу единственною на русскомъ языкѣ въ данной отрасли геометріи“. Л. Б. (*Современный Миръ*, мартъ 1911 г.).

„До сихъ поръ у насъ почти не было руководствъ, приводящихъ въ систему разнообразныя методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. Новое изданіе „Mathesis“ удачно восполняетъ этотъ пробѣлъ... Книга Адлера не предполагаетъ въ читателѣ никакихъ познаній изъ высшей математики и вполне доступна для всякаго, прошедшаго курсъ элементарной математики. Многочисленныя задачи для упражненія еще болѣе повышаютъ цѣнность этого прекраснаго руководства“. I. (*Природа и Люди*, № 10 1911 г.).

Проф. Э. Борель.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Въ обработкѣ проф. В. ШТЕККЕЛЯ.

Часть I. АРИΘМЕТИКА и АЛГЕБРА.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана и съ приложеніемъ его статьи. LXIV+434 стр. 8^о. 1911 г. Ц. 3 р.

Содержаніе: В. КАГАНЪ. „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи“.

Ариѳметика. Десятичное численіе. Сложеніе и вычитаніе. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ. Дѣленіе. Дѣлимость. Общій наибольшій дѣлитель и общее наименьшее кратное. Простыя числа. Обыкновенныя дроби. Десятичныя дроби, приближенныя частныя. Квадраты. Квадратный корень. Алгебра. Употребленіе буквъ; алгебраическія выраженія. Положительныя и отрицательныя числа. Примѣненіе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ; равномерное движеніе. Начальныя основанія алгебраическаго численія. Уравненія и неравенства первой степени. Задачи первой степени. Изслѣдованіе двучлена первой степени; графическое изображеніе. Уравненія второй степени. Задачи второй степени. Изслѣдованіе и графическое изображеніе хода измѣненій гомографической функціи. Ряды и логарисмы. Сложныя проценты. Таблицы. Логарисмы съ четырьмя десятичными знаками. Антилогарисмы съ четырьмя десятичными знаками.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ: „Вопросъ о реформѣ преподаванія математики въ русской средней школѣ для своего разрѣшенія въ благоприятномъ смыслѣ требуетъ, конечно, не однихъ лишь измѣненій въ учебныхъ планахъ, какъ ни полезны были бы эти измѣненія, пока еще не осуществленыя. Чрезвычайно важно показать, какъ реформу можно провести практически, какъ слѣдуетъ въ соотвѣтствіи съ новыми взглядами вести преподаваніе въ томъ или другомъ определенномъ отдѣлѣ курса. Насколько трудно написать учебникъ, соотвѣствующій современному уровню педагогическихъ требованій, видно изъ того, что въ Германіи, гдѣ много сдѣлавшей для выясненія значенія реформы и во многихъ учебныхъ заведеніяхъ ее уже осуществившей, до сихъ поръ нѣтъ руководства, которое въ такой мѣрѣ отвѣчало бы запросамъ школы, какъ разбираемый нами теперь [въ переработкѣ Штеккеля] курсъ французскаго профессора Бореля. Учителя математики и всѣ интересующіеся преподаваніемъ этого предмета найдутъ въ книгѣ въ вступительныхъ статьяхъ всѣ необходимыя для преподавателя указанія ея особенностей и нѣкоторыхъ недочетовъ. Появленіе перевода можно только приветствовать: изъ него познакомятся съ многимъ не только друзья, но и противники реформы“. А. К. (*Речь*, 28 марта 1911 г.).

Часть II. ГЕОМЕТРІЯ.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. В. Кагана, XXIII+334 стр. 8^о. Съ 403 черт. 1912 г. Ц. 2 р.

Содержаніе: Какъ и I часть, книга представляетъ руководство по геометріи въ духѣ реформы, которая проводится въ настоящее время въ Германіи и Франціи. Сушность и задачи реформы выяснены авторомъ во вступительной статьѣ къ I части книги. Характерная особенность построенія геометріи у Бореля заключается въ томъ, что все изложеніе проникнуто идеей свести геометрію къ группѣ движеній. Книга распадается на слѣдующія части: I Введеніе содержитъ краткій предварительный обзоръ основныхъ геометрическихъ образованій. II Прямая и окружность. III. Плоскость и круглыя тѣла. IV. Подобіе. V. Измѣреніе площадей и объемовъ. Дополненія: сюда отнесены элементы ученія о коническихъ сѣченіяхъ.

Проф. Ф. КЭДЖОРИ.

ИСТОРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

съ указаніемъ на методы преподаванія

ПЕРЕВОДЪ СЪ АНГЛІЙСКАГО

ПОДЪ РЕД., СЪ ПРИМѢЧ. И ПРИБАВЛ. ПРИВ.-ДОЦ. С. Ю. ТИМЧЕНКО.

VIII + 368 стр. 8^о. Съ рис. 1910 г. Ц. 2 р. 50 к.

СОДЕРЖАНІЕ:

Древній періодъ. Системы счисленія и числовые знаки.—*Ариѳметика и алгебра:* Египетъ, Греція, Римъ.—*Геометрія и тригонометрія:* Египетъ и Вавилонія, Греція, Римъ. **Средніе вѣка.** *Ариѳметика и алгебра:* Индусы, Арабы, Европа въ средніе вѣка.—*Геометрія и тригонометрія:* Индусы, Арабы, Европа въ средніе вѣка. **Новое время.** *Ариѳметика:* Ея развитіе, какъ науки и искусства. Англійскіе вѣса и мѣры. Развитіе школы коммерческой ариѳметики въ Англіи. Причины задержки развитія теоретической ариѳметики въ Англіи. Реформы въ преподаваніи ариѳметики. *Ариѳметика въ Соединенныхъ Штатахъ.* „Вопросы для забавы и развлеченія“.—*Алгебра:* Возрожденіе. Послѣдніе три вѣка.—*Геометрія и тригонометрія:* Изданія Евклида. Раннія изслѣдованія. Начала современной синтетической геометрии. Современная элементарная геометрія. *Прибавленія редактора.*

Проф. Г. ШУБЕРТЬ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ И ИГРЫ

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО І. ЛЕВИНТОВА

ПОДЪ РЕДАКЦ., СЪ ПРИМѢЧ. И ДОБАВЛ., ВѢСТ. ОП. ФИЗ. И ЭЛЕМЕНТ. МАТЕМ. “.

XIV + 357 стр. 16^о. Съ многими таблицами. 1911 г. Ц. 1 р. 40 к.

СОДЕРЖАНІЕ:

I Отдѣлъ: Задачи, относящіяся къ числамъ. §§ 1—17: Отгадываніе задуманныхъ чиселъ.—Предугадываніе полученныхъ результатовъ.—Замѣчательные ряды цифръ.—Весьма большія числа.—Отгадываніе числа очковъ прикрытыхъ картъ.—Задачи на переливаніе.—Повѣрка при помощи девятки и фокусы съ девяткой.—Фокусы съ костями.—Цѣпи домино.—Представленіе всѣхъ чиселъ въ видѣ суммы степеней числа 2. Задачи Баше о гиряхъ.—Отгадываніе владѣльцевъ различныхъ вещей.—Игра двухъ лицъ, которые поочередно прибавляютъ.—Совершенныя числа.—Пиагоровы и Героновы числа.—Затрудненное дѣленіе.—Софизмы. **II Отдѣлъ:** Задачи, относящіяся къ расположенію. §§ 18—25: О 15 христіанахъ и 15 туркахъ.—Магическіе квадраты.—Ходъ коня.—Такенъ или игра въ пятнадцать.—Вѣчный календарь для дней недѣли и Пасхи.—Вѣчный календарь для новолуній и полнолуній.—Эйлеровы странствованія.—Гамильтоновы круговыя поѣздки.

Примѣчанія и добавленія: Къ задачѣ о переливаніяхъ.—Цѣпи домино.—О гиряхъ.—О непрерывномъ вычерчиваніи фигуръ.

Изъ предисловія: Предлагаемый сборникъ требуетъ отъ читателя знакомства лишь съ первоначальными элементами ариѳметики. Какъ въ сборникахъ Люка и Болла, здѣсь представлены въ историко-критическомъ изложеніи важнѣйшія запутанныя игры и задачи математической природы, которыя могутъ служить для развлеченія.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА ИЗДАНИЕ:

Густавъ Ми

Профессоръ и директоръ Физическаго Института Грейфсвальдскаго
Университета

КУРСЪ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНИТИЗМА

Экспериментальная физика мірового ээира для физи-
ковъ, химиковъ и электротехниковъ.

Разрѣшенный авторомъ переводъ съ нѣмецкаго В. В. СОКОЛОВА

Подъ редакціей заслуженнаго профессора О. Д. ХВОЛЬСОНА.

Въ двухъ частяхъ. Съ 361 рисункомъ.

Около 50 печатныхъ листовъ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Часть I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА.

Главы I — XI: Общія свойства электрическаго поля. — Электрическое напря-
женіе. — Электрическій зарядъ. — Электрическія свойства изоляторовъ. —
Электрическое поле внутри проводниковъ. — Прохожденіе электричества че-
резъ электроны. — Электрическая проводимость въ газахъ. — Тлѣющій раз-
рядъ. — Разрядъ въ формѣ вольтовой дуги и электрической искры. — Радио-
активность. — Металлическіе проводники. — Заключение.

Часть II. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.

Главы I — IX: Общія свойства магнитнаго поля. — Электрическое напряженіе
и сила тока. — Силовыя дѣйствія магнитнаго поля. — Появленіе и исчезно-
веніе магнитнаго поля. — Магнитныя свойства веществъ. — Техническія примѣ-
ненія электромагнитныхъ силовыхъ дѣйствій. — Электромагнитныя колебанія,
— Принципъ релятивности (относительности). — Указатель.

Книга МИ выйдетъ въ свѣтъ 4-мя выпусками.

Выходъ 1-го выпуска предполагается въ мартъ 1912 года,
каждаго послѣдующаго черезъ два-три мѣсяца послѣ выхода
предыдущаго.

Подписная цѣна на все изданіе 5 рублей.

Допускается разсрочка: при подпискѣ 2 руб., по полученіи которыхъ
высылаются первый выпускъ; выпуски 2-й, 3-й и 4-й высылаются съ нало-
женіемъ платежа въ 1 руб. 10 коп. на каждый.

О всякой перемѣнѣ адреса издательство проситъ сообщать немедленно.

По выходѣ въ свѣтъ всего изданія цѣна будетъ повышена.

БИБЛИОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ

Библиотека содержитъ только такія классическія творенія великихъ мыслителей въ области математики и естествознанія, которыя читаются безъ большого напряженія и не требуютъ особенной подготовки со стороны читателя. Редакторы снабжаютъ каждый переводъ примѣчаніями и разъясненіями тѣхъ мѣстъ, пониманіе которыхъ представляется сколько-нибудь затруднительнымъ. Научная коммиссія „Mathesis“ въ своемъ выборѣ книгъ для Библиотеки классиковъ стремится дать возможность молодому поколѣнію черпать доступныя для него знанія изъ первоисточниковъ.

Въ настоящее время вышли въ свѣтъ слѣдующіе выпуски:

I. Р. ДЕДЕКИНДЪ. Непрерывность и ирраціональныя числа. Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго*. 40 стр. 8^о. Изд. 2-е. Ц. 40 к.

Идеи, развитыя въ этомъ замѣчательномъ трудѣ, составляютъ въ настоящее время основу всего высшаго анализа. Къ книгѣ приложена статья переводчика: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ (по Cantor'у)“.

II. АРХИМЕДЪ. Посланіе къ Эратосѣну о нѣкоторыхъ теоремахъ механики. Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстника Оп. Физики и Элем. Математики“. Съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко*. XV+27 стр. 8^о. Ц. 40 к. (См. каталогъ I. Гейбергъ. Новое сочиненіе Архимеда).

Сочиненіе содержитъ въ себѣ общіе методы, какими пользовался Архимедъ при нахожденіи площадей, объемовъ и центровъ тяжести; эти методы свидѣтельствуютъ, что великій греческій геометръ былъ весьма близокъ къ идеямъ современнаго интегральнаго исчисленія.

III. АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О квадратурѣ круга. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составленной проф. *Ф. Рудіо*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Н. Бернштейна*. VIII+155 стр. 8^о. Съ 21 черт. Ц. 1 р. 20 к.

Послѣ того, какъ задача о квадратурѣ круга была совершенно исчерпана доказательствомъ трансцендентности числа π , профессоръ Рудіо счелъ нужнымъ обратить вниманіе на тѣ древнѣйшія работы, которымъ задача о квадратурѣ круга обязана своимъ развитіемъ.

IV. Б. БОЛЬЦАНО. Парадоксы безконечнаго, изданные по посмертной рукописи автора *др. Фр. Пржигонскимъ*. Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго*. VIII+119 стр. 8^о. Ц. 80 к.

Въ этомъ сочиненіи Больцано является предшественникомъ Кантора въ теоріи безконечныхъ многообразій. Онъ устанавливаетъ и развиваетъ тѣ свойства безконечнаго, которыя легли въ основаніе теоріи Кантора.

Печатаются и готовятся къ печати:

V. I. ЛАГРАНЖЪ. Прибавленія къ „Элементаръ Алгебры“ Эйлера. Неопредѣленный анализъ. Переводъ съ французскаго подъ редакціей приватъ-доцента *С. О. Шатуновскаго*.

Въ этихъ прибавленіяхъ впервые дано полное рѣшеніе неопредѣленнаго квадратнаго уравненія съ двумя неизвѣстными въ самомъ общемъ видѣ. По изяществу и глубинѣ методовъ эта книга несомнѣнно представляетъ собой одинъ изъ перловъ среди твореній великаго геометра.

VI. ЕВКЛИДЪ. Первые шесть книгъ „Началъ“. Переводъ проф. *Д. М. Синцова* и пр.-доц. *С. Н. Бернштейна*.

VII. САДИ-КАРНО. О движущей силѣ огня.

VIII. БРАВЕ. Математическія начала кристаллографіи.

УСПѢХИ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ.

Въ серію книгъ подѣ этимъ общимъ заглавіемъ входятъ:

I. УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи, подѣ редакціей „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“

Выпускъ I. VIII+148 стр. 8^о. Съ 41 рис. и 2 табл. *Изданіе 3-е*. 1910 г. Ц. 75 к.

Содержаніе: *Винеръ*. Расширеніе нашихъ чувствъ.—*Тильчиковъ*. Радій и его лучи.—*Дебьернъ*. Радій и радиоактивность.—*Рихарцъ*. Электрическая волна.—*Слаби*. Телеграфированіе безъ проводовъ.—*Шмидтъ*. Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

Выпускъ II. IV+204 стр. Съ 50 рис. 1911 г. Ц. 1 р. 20 к.

Содержаніе: *Максъ Планкъ*. Единство физическаго міросозерцанія.—*А. Риги*. Новые взгляды на внутреннее строеніе вещества.—*Е. Ретгерфордъ*. Атомная теорія въ физикѣ.—*Э. Ріке*. О радиоактивномъ превращеніи.—*Дж. Дж. Томсонъ*. О новѣйшихъ успѣхахъ физики.—*А. Слаби*. Спутники электричества—тепло и свѣтъ.—*К. Штреккеръ*. Современное состояніе беспроволочной телеграфіи.

Печатаются и готовятся къ печати:

II. УСПѢХИ ХИМІИ. Сборникъ статей по химіи подѣ редакціей журнала „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“

Содержаніе выпуска I: *Беккерель*. Новѣйшія идеи о строеніи матеріи.—*Жоли*. Брауновское движеніе.—*Лерренъ*. Можно ли съ точностью взвѣсить атомъ?—*Рамзай*. Открытіе новыхъ газовъ.—*Рамзай*. Опредѣленія беконечно малыхъ количествъ вещества.—*Вальденъ*. О сущности процесса растворенія и роли растворителя.—*Бруни*. Труды Вантъ-Гоффа.—*Оствальдъ*. Катализъ.—*Э. Фишеръ*. Органической синтезъ и біологія.—*Юнгфлейшъ*. Труды Бертелло.

III. УСПѢХИ АСТРОНОМІИ. Сборникъ статей по астрономіи подѣ редакціей журнала „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“

Содержаніе выпуска I-го: *Гюббъ*. Задачи точной астрономіи.—*Хром-мелинъ*. Происхожденіе и природа кометъ.—*Лобелль*. Марсъ.—*Маундеръ*. Марсъ.—*Гэль*. Новѣйшія изслѣдованія солнца.—*Лаллеманъ*. Приливы и отливы въ морской корѣ и упругость земного шара.—*Риги*. Кометы и электроны.—*Тенкель*. Джорджъ Дарвинъ и его творенія.

IV. УСПѢХИ БІОЛОГІИ. Сборникъ статей по біологіи подѣ редакціей проф. *В. В. Завьялова*.

Содержаніе выпуска I-го. *Дж. Лёбъ*. Новѣйшіе успѣхи біологіи.—*Т. де-Фризъ*. Мутанціи и мутационные періоды въ связи съ происхожденіемъ видовъ.—*К. С. Шеррингтонъ*. Ассоціація спинномозговыхъ рефлексовъ и принципъ общаго поля.—*Леонъ Фредерикъ*. Химическая координація жизненныхъ явленій.—*Р. Фра-нсэ*. Реакціонная способность растений.—*Э. Р. Гёберъ*. Біологическое значеніе коллоидовъ.—*М. Фервортъ*. О процессахъ въ эмен-тарныхъ единицахъ нервной системы.—*Т. Горуттау*. Старое и новое по вопросу о сущности нервного проведенія.—*А. Бэтъ*. Новѣйшіе взгляды на сущность био-электрическихъ токовъ.—*Л. Яковфъ*. Теорія боковыхъ цѣпей Эрлиха.—*В. Эбштейнъ*. Къ исторіи развитія понятія о болѣзни.—*П. Жанэ*. Подсознательное.

Библиотека элементарной математики.

Издается под общей редакціей прив.-доц. С. О. Шатуновскаго.

Библиотека элементарной математики будетъ состоять изъ отдѣльныхъ книжекъ, не зависящихъ другъ отъ друга по содержанію и имѣющихъ размѣръ около пяти печатныхъ листовъ малаго формата каждая. Книжки библиотеки будутъ посвящены разработкѣ наиболѣе важныхъ или интересныхъ вопросовъ элементарной математики въ историческомъ и, по возможности, философскомъ освѣщеніи, при чемъ полная доступность изложенія, какъ основное требованіе, ставится на первый планъ.

Всѣ сочиненія, которыя войдутъ въ эту библиотеку, предполагаютъ въ читателѣ лишь элементарныя свѣдѣнія по математикѣ въ предѣлахъ курса среднихъ учебныхъ заведеній, и потому книжки библиотеки должны быть доступны для учащихся старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній, сохраняя интересъ и для лицъ, владѣющихъ болѣе полнымъ математическимъ образованіемъ.

Печатаются:

- I. *Е. Фурре*. Очеркъ исторіи геометріи.
- II. *В. Аренсъ*. Мысли и изреченія великихъ математиковъ.
- III. *В. Лицманъ*. Теорема Пифагора.
- IV. *Е. Фурре*. Геометрическія головоломки и курьезы.
- V. *Г. Вилейтнеръ*. Понятіе о числѣ.
- VI. *Э. Лёфлеръ*. Цифры и цифровыя системы главнѣйшихъ культурныхъ народовъ.
- VII. *О. Мейснеръ*. Элементы теоріи вѣроятностей.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

выходить 24 раза въ годъ
отдѣльными выпусками,
въ 24 и 32 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библиографическій отдѣлъ: обзоръ специальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

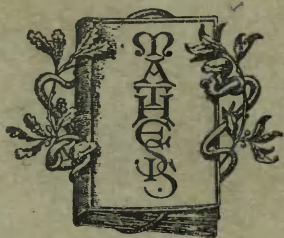
Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи**, платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденцій:

Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики“.



Тип. Акц. Южно-Русского
Общества Печатного Дѣла,
Одесса, Пушкинская, № 18

<http://mathesis.ru>

2 р. 50 к.